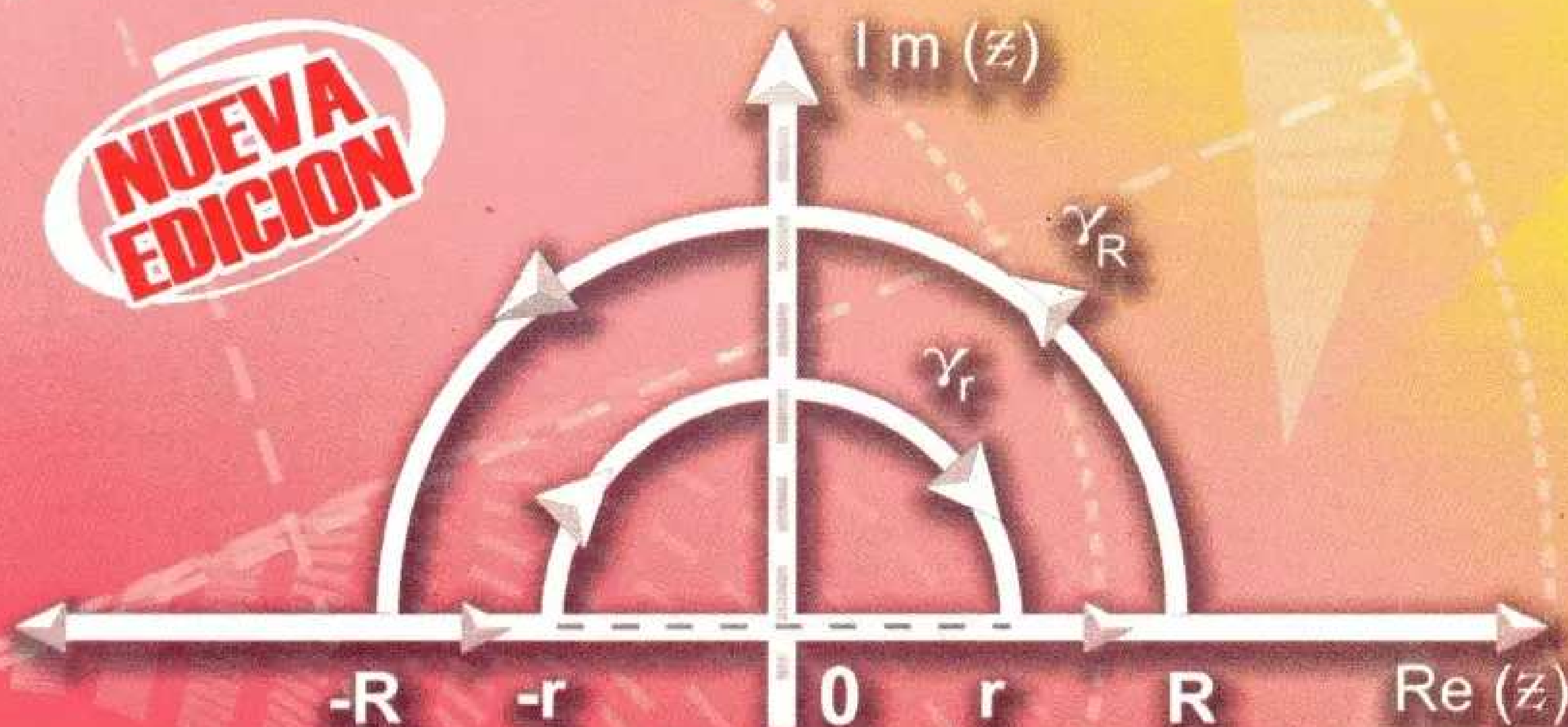
VARIABLE COMPLEJA

NUEVA EDICION

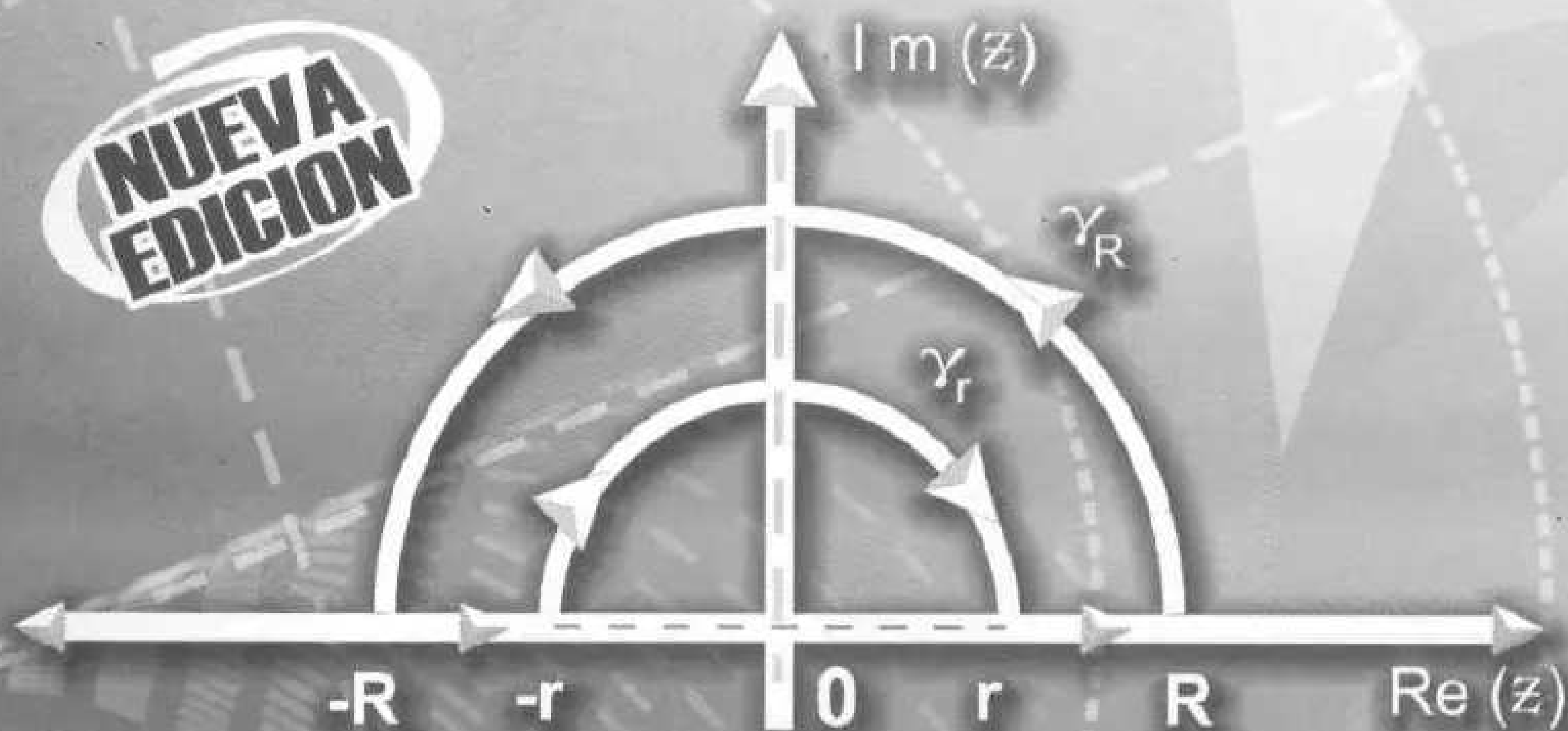


$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \text{Res}(f, z_j)$$

Eduardo Espinoza Ramos

VARIABLE COMPLEJA

NUEVA EDICION



$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Eduardo Espinoza Ramos

ÍNDICE

CAPÍTULO I

NÚMEROS COMPLEJOS

Pag.

CAPÍTULO II

FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS O FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

CAPÍTULO III

DERIVADAS DE FUNCIONES COMPLEJAS

CAPÍTULO IV

LAS FUNCIONES TRASCENDENTES BÁSICAS

CAPÍTULO V

INTEGRACIÓN COMPLEJA

CAPÍTULO VI

SUCESIONES Y SERIES INFINITAS COMPLEJAS

CAPÍTULO VII

SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

CAPÍTULO VIII

TEORIA DE LAS SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO

CAPÍTULO IX

EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES DEFINIDAS E IMPROPIAS (APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO)

CAPÍTULO X

TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES

CAPÍTULO I

NÚMEROS COMPLEJOS

1.1. ECUACIONES SIN SOLUCIÓN EN R.-

Consideremos una ecuación sin raíces reales: $x^2+2=0$, es decir: $\{x\in R / x^2+2=0\}=\phi$, esto es debido a que: $\forall x\in R, x^2\geq 0$, luego $x^2+2>0$, $\forall x\in R$.

GENERALIZANDO.- Consideremos la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, con coeficientes reales, no tiene solución en R. Si el discriminante es menor que cero, es decir: $b^2-4ac<0$

Luego para resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$, ampliaremos a otro conjunto llamado el conjunto de los " Números Complejos".

1.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos números complejos a todo par ordenado de números reales el cual denotaremos por $z=(a,b)$. Al conjunto de los números complejos denotaremos por:

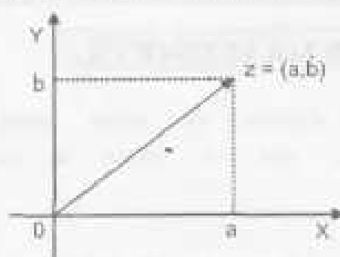
$$C = R\times R = \{(a,b) / a\in R \wedge b\in R\}$$

1.3. DEFINICIÓN.-

La parte real de un número complejo es su primera componente y la parte imaginaria es su segunda componente, luego tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales. Si $z=(a,b)$ es un número complejo, entonces la parte real de $z=(a,b)$ denotaremos por: $Re(z)=a$, y la parte imaginaria de $z=(a,b)$ denotaremos por: $Im(z)=b$

1.4. EL PLANO COMPLEJO.-

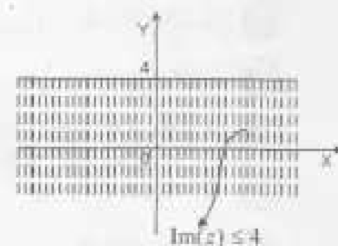
Entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano, existe una correspondencia biunívoca, de tal manera que todo número complejo $z=(a,b)$ se puede representar geométricamente por un segmento orientado (flecha), que tiene su origen, en el origen de coordenadas y su extremo en el punto (a,b).



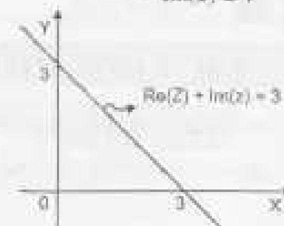
1.5. DEFINICIÓN.-

Un número complejo es real, si y sólo si, su parte imaginaria es cero; un número complejo es imaginario puro, si y sólo si, su parte real es cero. Es decir: $z=(a,b)$ un número complejo es real $\leftrightarrow Im(z)=b=0$

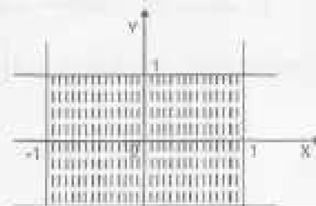
2) Sea $z=(x,y)$ un número complejo entonces $Im(z)=y$, pero como $Im(z)\leq 4$ entonces $y\leq 4$, que corresponde al semiplano que contiene al origen, cuyo borde es la recta de la ecuación $y=4$ (ver gráfica).



3) Sea $z=(x,y)$ un número complejo de donde $Re(z)=x \wedge Im(z)=y$, pero como $Re(z)+Im(z)=3$, entonces $x+y=3$, que nos representa la recta que pasa por los puntos $(3,0)$, $(0,3)$.



4) Sea $z=(x,y)$ un número complejo, de donde $Re(z)=x \wedge Im(z)=y$ pero como $-1\leq Re(z)\leq 1 \wedge -1\leq Im(z)\leq 1$ entonces $-1\leq x\leq 1 \wedge -1\leq y\leq 1$



complejo es real ↔ Im(z) = b = 0

z = (a,b) un número complejo es imaginario puro ↔ Re(z) = a = 0

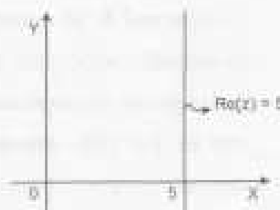
Ejemplo.- Determinar analíticamente y gráficamente los complejos z = (x,y), tal que verifiquen:

1) Re(z) = 5 2) Im(z) ≤ 4

3) Re(z) + Im(z) = 3 4) -1 ≤ Re(z) ≤ 1 ∧ -1 ≤ Im(z) ≤ 1

Desarrollo

1) Sea z = (x,y) un número complejo, entonces Re(z) = x, pero como Re(z) = 5, entonces x = 5, es una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa x = 5



1.6. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Describir analíticamente y gráficamente las siguientes relaciones:

(1) Re(z) = -3 (2) Im(z) = -2

(3) Re(z) < 0 (4) Im(z) > 0

(5) Re(z) + Im(z) = - 2 (6) Re(z) – Im(z) = 4

(7) Re(z) = Im(z) (8) 5 Re(z) – 3 Im(z) = 1

(9) -2 ≤ Re(z) ≤ 2 (10) -2 ≤ Im(z) ≤ 2

(11) Re(z) + Im(z) < 0 (12) Re(z) + Im(z) ≤ 1

(13) Re(z) + Im(z) > -2 (14) 4 Re(z) – 5 Im(z) < 1

(15) -3 ≤ Re(z) ≤ 2 ∧ -2 ≤ Im(z) ≤ 3

(16) -2 ≤ Re(z) ≤ 2 ∧ -2 ≤ Im(z) ≤ 2

(17) 2 ≤ Re(z) ≤ 4 ∧ 2 ≤ Im(z) ≤ 4

(18) -6 ≤ Re(z) ≤ -2 ∧ -6 ≤ Im(z) ≤ -2

(19) -3 ≤ Re(z) ≤ 5 ∧ -5 ≤ Im(z) ≤ -2

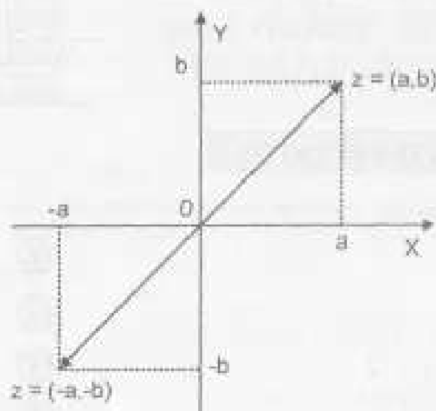
(20) -5 ≤ Re(z) ≤ -3 ∧ 2 ≤ Im(z) ≤ 5

1.7. CERO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Un número complejo es cero; si, tanto su parte real, como su parte imaginaria es cero, es decir: z = (a,b) es un número complejo cero ⇔ a = 0 ∧ b = 0.

El opuesto de un número complejo z = (a,b) es definido por:

$$-z = -(a,b) = (-a, -b)$$



1.8. OPERACIONES EN COMPLEJOS.-

a) IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Dos números complejos son iguales cuando tienen iguales su parte real y su parte imaginaria. Es decir: (a,b) = (c,d) ⇔ a = c ∧ b = d

Ejemplo.- $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (2,3)$ son iguales $(z_1 = z_2)$

Ejemplo.- $z_1 = (2,3)$ y $z_2 = (3,5)$ no son iguales $(z_1 \neq z_2)$

Luego: (a,b) ≠ (c,d) ⇔ a ≠ c y/o b ≠ d

b) SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

La suma de dos números complejos, es un número complejo, que tiene por parte real a la suma de las partes reales de los sumandos y por parte imaginaria a la suma de las partes imaginarias de las mismas, es decir:

Si $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ entonces la suma: $z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$

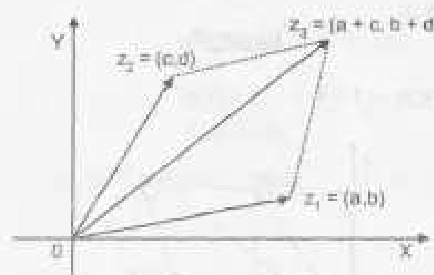
Ejemplo.- Calcular la suma de (2,4) y (3,5) es decir:

$$(2,4) + (3,5) = (2+3, 4+5) = (5,8)$$

c) REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ dos números complejos, entonces se tiene:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = z_3$$



d) PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean $z_1, z_2, z_3 \in C$, entonces:

P_1. Propiedad de Clausura: $z_1 + z_2 \in C$

P_2. Propiedad Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

P_3. Propiedad Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

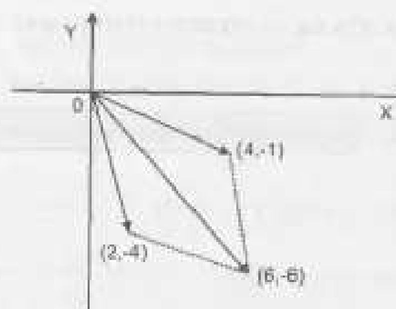
P_4. Propiedad de Existencia y Unidad del Neutro Aditivo:

Existe el elemento neutro $w \in C$ tal que: $z + w = z,\ \forall z \in C$

P_5. Propiedad de Existencia del Universo Aditivo, para cualquier $z \in C$ existe otro elemento que denotaremos por -z, tal que z + (-z) = (0,0).

NOTA.- La demostración de estas propiedades se deja para el lector.

e) SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-



3) (6,-2) – (2,-5)

Desarrollo

Sean $z_1=(a,b)$ y $z_2=(c,d)$ dos números complejos, definimos la diferencia de z_1 y z_2 por: $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$, es decir:

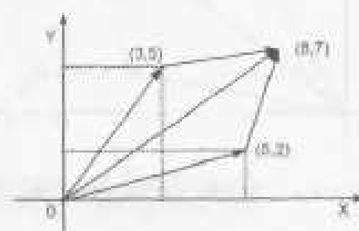
$$z_1-z_2=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$$

Ejemplos. Efectuar las operaciones indicadas analíticamente y gráficamente.

1) (3,4) + (5,2)

Desarrollo

(3,4) + (5,2) = (3 + 5, 4 + 2) = (8,6)

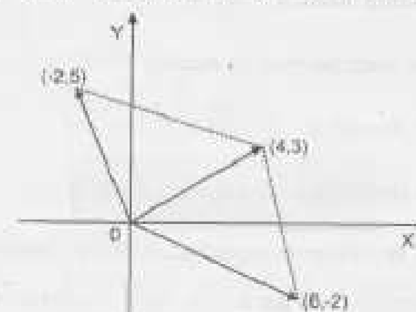


2) (4,-2) + (2,-4)

Desarrollo

(4,-2) + (2,-4) = (4 + 2, -2 - 4) = (6,-6)

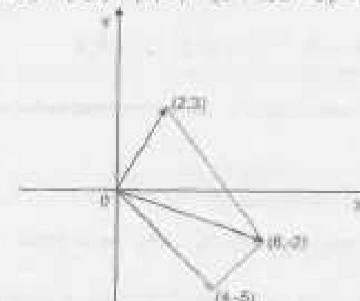
(6,-2) - (2,-5) = (6,-2) + (-2,5) = (6 - 2, -2 + 5) = (4,3)



4) (2,3) - (-4,5)

Desarrollo

(2,3) - (-4,5) = (2,3) + (4,-5) = (2 + 4, 3 - 5) = (6,-2)



f) **MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-**

Sean $z_1=(a,b)$ y $z_2=(c,d)$ dos números complejos, al producto de z_1 y z_2 definiremos por: $z_1.z_2=(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Ejemplo.- Sean $z_1=(2,3)$ y $z_2=(1,5)$

Luego $z_1.z_2=(2,3).(1,5)=(2-15,10+3)=(-13,13)$

g) **PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-**

Sean $z_1,z_2,z_3\in C$, números complejos, entonces:

P_1. Propiedad de la Clausura: $z_1.z_2\in C$

P_2. Propiedad Conmutativa: $z_1.z_2=z_2.z_1$

P_3. Propiedad Asociativa: $(z_1.z_2).z_3=z_1.(z_2.z_3)$

P_4. Propiedad Distributiva: $z_1.(z_2+z_3)=z_1.z_2+z_1.z_3$

P_5. Propiedad de Existencia y unicidad del neutro multiplicativo. Existe un único número complejo u tal que u.z = z, ∀ z ∈ C siendo u = (1,0)

P_6. Propiedad de Existencia y unicidad del inverso multiplicativo. Para cada número complejo z ≠ (0,0), ∃ α∈C tal que, z.α=u siendo $\alpha=z^{-1}$; u=(1,0)

P_7. Para z ∈ C, k ∈ R, k.z = k.(a,b) = (ka, kb).

Demostraremos la propiedad P_6, las otras propiedades dejamos como ejercicio para el lector.

Sea z = (a,b) ≠(0,0), suponiendo α = (x,y) tal que, z.α = u, siendo u = (1,0), es decir: (a,b).(x,y) = (1,0), que al efectuar la operación se tiene:

(ax - by, ay + bx) = (1,0), por definición de igualdad tenemos

$\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene: $x=\frac{a}{a^2+b^2}$, $y=-\frac{b}{a^2+b^2}$

Observamos que: (a,b) ≠ (0,0) ⇔ a ≠ 0 y/o b ≠ 0, entonces $a^2+b^2\neq 0$

por lo tanto: $\alpha=(x,y)=(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2})$

Ejemplo.- Si $z=(3,5)\Rightarrow z^{-1}=(\frac{3}{34},-\frac{5}{34})$

h) **UNIDAD Y RECÍPROCO.-**

El elemento neutro multiplicativo es la unidad compleja y denotaremos por u = (1,0) ó también 1 = (1,0).

El inverso multiplicativo α de un número complejo z = (a,b) ≠ (0,0) se llama recíproco de z y denotaremos por:

$$\alpha=z^{-1}=(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$$

Observación.- El número complejo (a,0) se identifica con el número real a, y denotaremos como (a, 0) = a, en forma intercambiable.

i) **DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-**

Sean $z_1,z_2\in C$, siendo $z_2\neq(0,0)$, la división de z_1 y z_2 definiremos por:

$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}$ de esta definición obtenemos la regla para la división.

Si $z_1=(a,b)$ y $z_2=(c,d)\neq(0,0)$, entonces: $z_2^{-1}=(\frac{c}{c^2+d^2},-\frac{d}{c^2+d^2})$

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}=(a,b).(\frac{c}{c^2+d^2},-\frac{d}{c^2+d^2})=(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2})$$

Luego: $\frac{z_1}{z_2}=(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2})$

1.9. UNIDAD IMAGINARIA.-

El número complejo imaginario puro de segunda componente igual a 1, se llama unidad

Los números complejos conjugados caracterizan puntos simétricos respecto al eje real, así: Si z = a + bi su conjugada es: $\bar{z}=a-bi$



El número complejo imaginario puro de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y denotamos por: $i = (0,1)$.

OBSERVACIÓN.- La multiplicación de un número complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes, es decir:

$$\boxed{(b,0)i = (b,0).(0,1) = (0,b)}$$

1.10. FORMA STÁNDAR (RECTANGULAR O BINÓMICA) DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sea $z = (a,b)$ un número complejo, por definición de suma tenemos :

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a\,(1,0) + b\,(0,1) = a + bi$$

Luego $z = a + bi$ es la forma estándar (rectangular o binómica) del número complejo z.

1.11. TEOREMA.-

Demostrar que: $i^2 = -1$

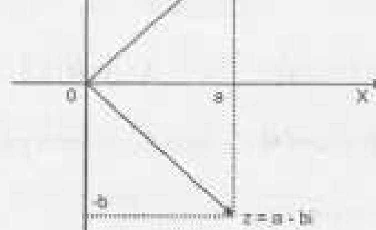
Demostración

$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$ por lo tanto $i^2 = -1$, como $i^2 = -1$ entonces $i = \sqrt{-1}$

1.12. LA CONJUGACIÓN EN C.-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos conjugado de $z = a + bi$ al número complejo $a - bi$, al cual representaremos por $\bar{z} = a - bi$

b) **DEFINICIÓN.-** Dos números complejos son conjugados si difieren solamente en sus partes imaginarias en los signos.



PROPIEDADES: Sean $z_1, z_2, \in C$, Entonces:

P_1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ $\qquad$ P_2. $\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$

P_3. $z_1 = \bar{\bar{z}}_1$ $\qquad$ P_4. $(\bar{z}_1)^{-1} = \overline{(z_1^{-1})}$, $z_1 \neq (0,0)$

P_5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq (0,0)$

1.13. MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

El módulo de un número complejo $z = a + bi$ es un número real positivo definido por:

$$\boxed{\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Geométricamente; el módulo de un número complejo $z = a + bi$, es la longitud del segmento orientado que representa a $z = a + bi$

Ejemplo: Si $z = 3 + 4i \Rightarrow \|z\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

a) **PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS**

Sean $z_1, z_2, z_3 \in C$, entonces:

P_1. Si $z_1 \neq (0,0) \Rightarrow \|z_1\| > 0$ $\qquad$ P_2. Si $\|z_1\| = 0 \Rightarrow z_1 = (0,0)$

P_3. Si $\|z_1\| = \|-z_1\| = \|\bar{z}_1\|$ $\qquad$ P_4. Si $\|z_1\|^2 = z_1.\bar{z}_1$

P_5. $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$ $\qquad$ P_6. $\left\|\dfrac{z_1}{z_2}\right\| = \dfrac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, $z_2 \neq (0,0)$

P_7. $\|z_1.z_2\| = \|z_1\|.\|z_2\|$ $\qquad$ P_8. $Re(z) \leq \|z\|$, $Im(z) \leq \|z\|$

Demostraremos la propiedad P_5, los demás dejamos para el lector:

$$\|z_1 + z_2\|^2 = (z_1 + z_2).\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2).(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1.\bar{z}_1 + z_1.\bar{z}_2 + z_2.\bar{z}_1 + z_2.\bar{z}_2 = \|z_1\|^2 + z_1.\bar{z}_2 + \overline{z_1.\bar{z}_2} + \|z_2\|^2$$

$$= \|z_1\|^2 + 2Re(z_1.\bar{z}_2) + \|z_2\|^2 \leq \|z_1\|^2 + 2\|z_1\|.\|\bar{z}_2\| + \|z_2\|^2$$

$$= \|z_1\|^2 + 2\|z_1\|.\|z_2\| + \|z_2\|^2 = (\|z_1\| + \|z_2\|)^2$$

Por lo tanto: $\|z_1 + z_2\|^2 \leq (\|z_1\| + \|z_2\|)^2$

$\therefore\ \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

1.14. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Hallar los valores de x e y si : $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$

Desarrollo

Sean $z_1 = 1 + 2i = (1,2)$; $z_2 = 3 - 5i = (3,-5)$; $z_3 = 1 - 3i = (1,-3)$

Como $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$, entonces

$(1,2)x + (3,-5)y = (1,-3) \Rightarrow (x,2x) + (3y,-5y) = (1,-3)$

$(x + 3y\ ,\ 2x - 5y) = (1,-3)$, por igualdad

$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene $x = -\dfrac{4}{11}$, $y = \dfrac{5}{11}$

② Determinar los números reales a y b sabiendo que: $(-1 + i)a + (1 + 2i)b = 1$

Desarrollo

Sean $z_1 = -1 + i = (-1,1)$; $z_2 = 1 + 2i = (1,2)$; $z_3 = 1 = 1 + 0i = (1,0)$

Como $(-1 + i)a + (1 + 2i)b = 1$, entonces: $(-1,1)a + (1,2)b = (1,0)$

$(-a + b\ ,\ a + 2b) = (1,0)$, por igualdad

$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$, resolviendo el sistema $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{1}{3}$

③ Expresar cada uno de los siguientes ejercicios como: 1, -1, i, -i

a) i^3

Desarrollo

$i^3 = i^2.\,i = -i$, de donde $i^3 = -i$

b) i^7

Desarrollo

$i^7 = (i^2)^3 i = (-1)^3 i = -i$ $\qquad$ de donde $i^7 = -i$

c) i^8

Desarrollo

$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$, de donde $i^8 = 1$

d) i^{14}

Desarrollo

$i^{14} = (i^2)^7 = (-1)^7 = -1$, de donde $i^{14} = -1$

e) i^{17}

Desarrollo

$i^{17}=(i^2)^8.i=(-1)^8 i=i$, de donde $i^{17}=i$

(4) Efectuar las siguientes operaciones y el resultado expresar en la forma binómica

a) $(5+7i)+(8+2i)$

Desarrollo

$(5+7i)+(8+2i)=(5+8)+(7+2)i=13+9i$

b) $(2+\sqrt{3}i).(5-6\sqrt{3}i)$

Desarrollo

$(2+\sqrt{3}i).(5-6\sqrt{3}i)=(2,\sqrt{3}).(5,-6\sqrt{3})$

$=(10+18\ ,\ -12\sqrt{3}+5\sqrt{3})=(28,-7\sqrt{3})=28-7\sqrt{3}i$

c) $\frac{(2+i).(3-2i).(1+2i)}{(1-i)^2}$

Desarrollo

$(2+i).(3-2i).(1+2i)=(8-i).(1+2i)=10+15i$

además $(1-i)^2=-2i$, luego

$\frac{(2+i).(3-2i).(1+2i)}{(1-i)^2}=\frac{10+15i}{-2i}=\frac{(10+15i).(i)}{(-2i).i}=\frac{-15+10i}{2}=-\frac{15}{2}+5i$

d) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

Desarrollo

$i^4+i^9+i^{16}=1+i+1=2+i$ y $2-i^5+i^{10}-i^{15}=2-i-1+i=1$

Luego $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}=\frac{2+i}{1}=2+i$

e) $\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}-\frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$

Desarrollo

$\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}=3(\frac{1+i}{1-i})^2=2[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}]^2=3(\frac{2i}{2})^2=-3$

$\frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}=2(\frac{1-i}{1+i})^3=2[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}]^3=2(\frac{-2i}{2})^3=2i$

Luego se tiene: $\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2}-\frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}=-3-2i$

f) $\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1-i}$

Desarrollo

$\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1-i}=\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)}+\frac{i(1+i)}{(i-1)(1+i)}=\frac{1-i}{1}+\frac{i-1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

g) $(1+i)^n+(1-i)^n$

Desarrollo

Si n es par entonces:

a) $n=4k,\ k\in Z$. Entonces $(1+i)^n=(1+i)^{4k}=(-4)^k$

$(1-i)^n=(1-i)^{4k}=(-4)^k$

$(1+i)^n+(1-i)^n=(-4)^k+(-4)^k=2(-4)^k$, $k\in Z$

b) $n=4k+2,\ k\in Z$ entonces $(1+i)^n=(1+i)^{4k+2}=(-4)^k(+2i)$

$(1-i)^n=(1-i)^{4k+2}=(-4)^k(-2i)$

$(1+i)^n+(1-i)^n=2i(-4)^k-2i(-4)^k=0$

Si n es impar entonces:

a) $n=4k+1,\ k\in Z$, entonces $(1+i)^n=(1+i)^{4k+1}=(-4)^k(1+i)$

$(1-i)^n=(1-i)^{4k+1}=(-4)^k(1-i)$

$(1+i)^n+(1-i)^n=(-4)^k(1+i)+(-4)^k(1-i)=2(-4)^k$, $k\in Z$

b) $n=4k+3,\ k\in Z$, entonces $(1+i)^n=(1+i)^{4k+3}=(-4)^k(-2+2i)$

$(1-i)^n=(1-i)^{4k+3}=(-4)^k(-2-2i)$

$(1+i)^n+(1-i)^n=(-4)^k(-2+2i)+(-4)^k(-2-2i)=(-4)^{k+1}$

(5) Calcular i^n, donde n es un entero.

Desarrollo

Si n es par entonces

a) $n=4k,\ k\in Z$, entonces: $i^n=i^{4k}=1$

b) $n=4k+2,\ k\in Z$, entonces: $i^n=i^{4k+2}=i^{4k}.i^2=-1$

Si n es impar entonces:

a) $n=4k+1,\ k\in Z$, entonces: $i^n=i^{4k+1}=i^{4k}.i=i$

b) $n=4k+3,\ k\in Z$ entonces: $i^n=i^{4k+3}=i^{4k}.i^3=-i$

(6) Demostrar que: $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}=i^n(1-i)$

Desarrollo

$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}=\frac{(1+i)^{n-1}(1+i)}{(1-i)^{n-1}}=(\frac{1+i}{1-i})^{n-1}(1+i)$

(7) Probar que:

a) $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

Desarrollo

Sea $z=x+y \Rightarrow \bar{z}=x-iy$, luego

$\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{x+iy+x-iy}{2}=\frac{2x}{2}=x=Re(Z)$ $\therefore$ $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

b) $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

Desarrollo

Sea $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$

$\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{x+iy-(x-iy)}{2i}=\frac{2iy}{2i}=y=Im(z)$ $\therefore$ $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

c) $Im(iz)=Re(z)$

Desarrollo

Sea $z=x+iy \Rightarrow iz=-y+ix \Rightarrow Im(iz)=x$

además $Re(z)=x$ entonces $Re(z)=Im(iz)$

d) $Im(z_1.z_2)=Re(z_1).Im(z_2)+Im(z_1).Re(z_2)$

Desarrollo

Por el ejercicio b) se tiene $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

Luego $Im(z_1.z_2)=\frac{z_1.z_2-\overline{z_1z_2}}{2i}=\frac{2z_1z_2-2\overline{z_1z_2}}{4i}$

$$= (i)^{n-1}(1+i) = \frac{i^n(1+i)}{i} = \frac{i^n(1+i)(-i)}{i(-i)} = i^n(1-i)$$

$$\text{Im}(z_1 z_2) = \ldots$$

$$= \text{Re}(z_1).\text{Im}(z_2) + \text{Im}(z_1).\text{Re}(z_2)$$

(8) Si z es un número complejo tal que: $\| z \| = 1$, calcular $\|1+z\|^2 + \|1-z\|^2$

Desarrollo

$$\|1+z\|^2 + \|1-z\|^2 = (1+z)\overline{(1+z)} + (1-z)\overline{(1-z)}$$

$$= 1+z+\bar{z}+\|z\|^2 + 1-z-\bar{z}+\|z\|^2 = 2+2\|z\|^2 = 2+2 = 4$$

(9) Demostrar que: $\| z - \frac{3}{4}i \| = \frac{1}{4}$ si $z = \frac{1-a}{1+2ai}$, donde a es un número real.

Desarrollo

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{i-a}{1+2ai} - \frac{3}{4}i = \frac{2a+i}{4+8ai}$$

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{2a+i}{4+8ai} = \frac{(2a+i)(4-8ai)}{(4+8ai)(4-8ai)} = \frac{16a}{16+64a^2} + \frac{4-16a^2}{16+64a^2}i$$

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{a}{1+4a^2} + \frac{1-4a^2}{4+16a^2}i \text{, de donde}$$

$$\| z - \frac{3}{4}i \| = \sqrt{(\frac{a}{1+4a^2})^2 + (\frac{1-4a^2}{4+16a^2})^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

(10) Calcular z^2 siendo $Z = -\|-1+i\| + \sqrt{2}i$

Desarrollo

$$\|1-i\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z^2 = (-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^2 = 2-4i-2 = -4i \qquad \therefore z^2 = -4i$$

(11) Hallar el número complejo z tal que: $\| z \| = 1$ y $\text{Re}(z) = 0$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \text{Re}(z) = x = 0 \Rightarrow z = 0 + iy$

Como $\| z \| = 1 \Rightarrow \| z \| = \sqrt{y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$\therefore z = \pm i$

(12) Describir y construir la gráfica del lugar representado para cada una de las ecuaciones siguientes

a) $\| z - i \| = 2$

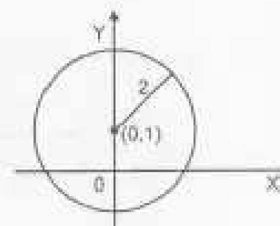
Desarrollo

Como $z = x + iy$

entonces $\| z - i \| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$

de donde $x^2 + (y-1)^2 = 4$, que es

una circunferencia de centro (0,1) y radio 2.



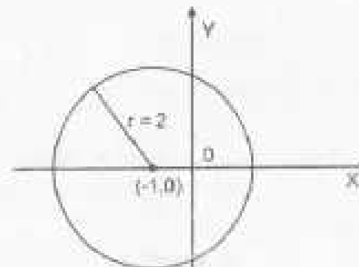
b) $\text{Re}[z(\bar{z}+2)] = 3$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

Como $z(\bar{z}+2) = 3 \Rightarrow (x+iy)[x - iy + 2] = 3$

$x^2 + 2x + y^2 + 2yi = 3$ de donde $x^2 + 2x + y^2 = 3$ entonces $(x+1)^2 + y^2 = 4$ que es una circunferencia de centro (-1,0) y radio 2.



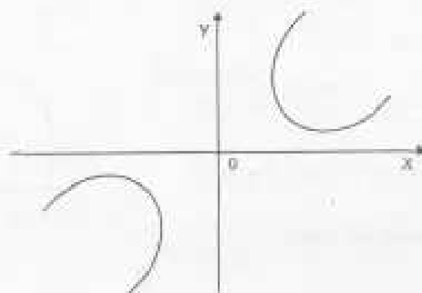
c) $\text{Im}(z^2) = 4$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, de donde

$\text{Im}(z^2) = 2xy$ como $\text{Im}(z^2) = 4$ entonces

$2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$ que es la ecuación de una hipérbola, su gráfico es:



d) $\| z \| = \text{Re}(z) + 1$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \text{Re}(z) = x$

$\| z \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Como $\| z \| = \text{Re}(z) + 1$, entonces

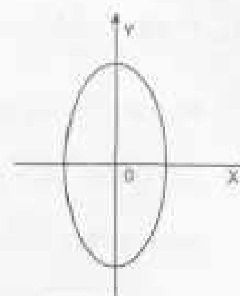


Sea $z = x + iy \Rightarrow z + 2i = x + (y+2)i$

$$\| z + 2i \| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$$z - 2i = x + (y-2)i$$

$$\| z - 2i \| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$



como $\| z + 2i \| + \| z - 2i \| = 6$, entonces:

$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$, de donde al quitar el radical y simplificando se tiene: $9x^2 + 8y^2 = 45$, que es la ecuación de una elipse.

(13) Describir gráficamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades.

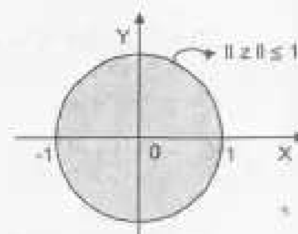
a) $\| z \| \le 1$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \| z \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Como $\| z \| \le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le 1$

De donde $x^2 + y^2 \le 1$, su gráfico es:



Como $\|z\| = Re(z) + 1$, entonces

Se tiene $\sqrt{x^2+y^2} = x+1$

$x^2+y^2 = x^2+2x+1$ de donde

se tiene $y^2 = 2x+1$ que es la ecuación de la parábola

e) $\|z+2i\| + \|z-2i\| = 6$

Desarrollo

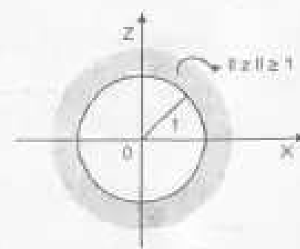
b) $\|z\| \geq 1$

Desarrollo

Sea $z = x+iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Como $\|z\| \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq 1$, de

Donde $x^2+y^2 \geq 1$, su gráfico es:



c) $1 \leq \|z+i\| \leq 2$

Desarrollo

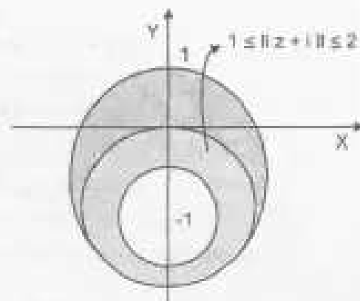
Sea $z = x+iy \Rightarrow z+i = x+(y+1)i$

$\|z+i\| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$

como $1 \leq \|z+i\| \leq 2$ entonces

$1 \leq \sqrt{x^2+(y+1)^2} \leq 2$, de donde

$1 \leq x^2+(y+1)^2 \leq 4$



d) $Re(z^2) > 1$

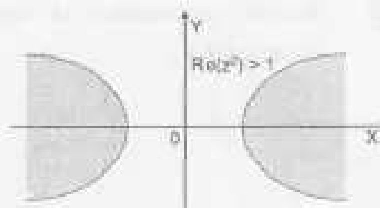
Desarrollo

Sea $z = x+iy \Rightarrow z^2 = x^2-y^2+2xyi$

Luego $Re(z^2) = x^2-y^2$, como

$Re(z^2) > 1 \Rightarrow x^2-y^2 > 1$

Su gráfico es



e) $\|z-1\| \leq 2\|z+1\|$

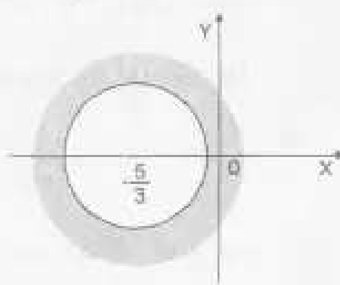
Desarrollo

Sea $z = x+iy \Rightarrow z-1 = (x-1)+iy$

$z+1 = (x+1)+iy$

Además $\|z-1\| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\|Z+1\| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$



como $\|z-1\| \leq 2\|z+1\| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, de donde

$x^2-2x+1+y^2 \leq 4(x^2+2x+1+y^2)$

$$3x^2+3y^2+10x+3 \geq 0 \quad \text{entonces} \quad (x+\frac{5}{3})^2+y^2 \geq \frac{16}{9}$$

(14) Demostrar la identidad: $\|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2 = (1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$

Demostración

Se conoce que $\|z\|^2 = z.\bar{z}$, por lo tanto

$\|1-\bar{z}w\|^2 = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w})$; $\|z-w\|^2 = (z-w).(\bar{z}-\bar{w})$

$\|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2 = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w}) - (z-w)(\bar{z}-\bar{w})$

$= (1-\bar{z}w - z\bar{w} + \bar{z}z.w\bar{w}) - (z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w})$

$= 1+\bar{z}z.w.\bar{w} - z\bar{z} - w.\bar{w} = 1+\|z\|^2\|w\|^2 - \|z\|^2 - \|w\|^2$

$= (1-\|z\|^2) - \|w\|^2(1-\|z\|^2) = (1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)$

(15) Si $\|z\| < 1$ y $\|w\| < 1$. Demostrar que: $|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}| < 1$, $z, w \in C$

Demostración

Por hipótesis se tiene: $\|z\| < 1$ y $\|w\| < 1 \Rightarrow \|z\|^2 < 1$ y $\|w\|^2 < 1$

Luego $1-\|z\|^2 > 0$ y $1-\|w\|^2 > 0$, de donde $(1-\|z\|^2).(1-\|w\|^2) > 0$ ... (1)

En el ejercicio 14) se tiene: $(1-\|z\|^2)\cdot(1-\|w\|^2) = \|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\|1-\bar{z}w\|^2 - \|z-w\|^2 > 0$

de donde $\|z-w\|^2 < \|1-\bar{z}w\|^2 \Rightarrow \|z-w\| < \|1-\bar{z}w\| \Rightarrow \|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\| < 1$

(16) Si $z,w \in C$, Demostrar que: $Re(\frac{z}{z+w}) + Re(\frac{w}{z+w}) = 1$

Demostración

Sean $z = a+bi$, $w = c+di$, entonces:

$z+w = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

$$\frac{z}{z+w} = \frac{a+bi}{(a+c)+(b+d)i} = \frac{(a+bi).((a+c)-(b+d)i)}{[(a+c)+(b+d)i][(a+c)-(b+d)i]}$$

$$= \frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} + \frac{a(b+d)+c(b+d)i}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$Re(\frac{z}{z+w}) = \frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad \text{... (1)}$$

$$\frac{w}{z+w} = \frac{c+di}{(a+c)+(b+d)i} = \frac{(a+di)((a+c)-(b+d)i)}{[(a+c)+(b+d)i][(a+c)-(b+d)i]}$$

$$= \frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} + (\frac{-c(b+d)+d(a+c)}{(a+c)^2+(b+d)^2})i$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}} - i\sqrt{\operatorname{sen} x-i\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}} + i\sqrt{\operatorname{sen} x-i\sqrt{\cos x}}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}} - i\sqrt{\operatorname{sen} x-i\sqrt{\cos x}})^2}{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}+\operatorname{sen} x-i\sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x} - 2i\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\cos x} - \operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}}{2\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{2i(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\cos x})}{2\operatorname{sen} x} = \frac{i(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\cos x})}{\operatorname{sen} x}$$

(18) Probar que: $\|z_1+z_2\|^2 + \|z_1-z_2\|^2 = 2(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)$

Desarrollo

$\|z_1+z_2\|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} + z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1}$

$= \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1}$ ... (1)

$\|z_1-z_2\|^2 = (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2}) = z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} - z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1}$

$$Re(\frac{w}{z+w})=\frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad \dots (2)$$

sumando (1) y (2) se tiene:

$$Re(\frac{z}{z+w})+Re(\frac{w}{z+w})=\frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}=1$$

$$\therefore\ Re(\frac{Z}{Z+w})+Re(\frac{w}{Z+w})=1$$

(17) Simplificar la expresión: $\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}}-i\sqrt{\operatorname{sen} x-i\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\operatorname{sen} x+i\sqrt{\cos x}}-i\sqrt{\operatorname{sen} x-i\sqrt{\cos x}}}$

Desarrollo

Multiplicando por su conjugando se tiene:

$$=\|z_1\|^2+\|z_2\|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1} \qquad \dots (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=\|z_1\|^2+\|z_2\|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+\|z_1\|^2+\|z_2\|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}$$

$$=2\|z_1\|^2+2\|z_2\|^2=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$$

$$\therefore\ \|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$$

(19) Hallar el modulo de $\dfrac{1+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$, $0\le\theta\le\pi$

Desarrollo

$$\text{Sea } z=\frac{1+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}=\frac{(1+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).(1-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}{(1-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).(1-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}{1-\cos\theta}i$$

$$\|z\|=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{(1-\cos\theta)^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}=\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}}=|\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|$$

$$\therefore\ |z|=|\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}|$$

(20) Hallar el módulo de: $\dfrac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}.\dfrac{6+4i}{5+i}.(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(3+4i)$

Desarrollo

$$\text{Sea } z_1=\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)} \Rightarrow \|z_1\|=\frac{\sqrt{13}.5}{\sqrt{52}.\sqrt{289}}=\frac{5}{34}$$

$$Z_2=\frac{(6+4i)(3-i)}{5+i} \Rightarrow \|z_2\|=2\sqrt{5}$$

$$z_3=(\sqrt{3}-i\sqrt{2})(3+4i) \Rightarrow \|z_3\|=\sqrt{5}.5$$

$$\text{Luego } \|z_1.z_2.z_3\|=\|z_1\|.\|z_2\|.\|z_3\|=\frac{5}{34}.2\sqrt{5}.\sqrt{5}.5=\frac{125}{17}$$

$$\therefore\ \|z_1.z_2.z_3\|=\frac{125}{17}$$

(21) $w=\dfrac{1+z}{1-z}$, donde $z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$, hallar w.

Desarrollo

Reemplazando z en w se tiene:

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\frac{(\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2})}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}(\operatorname{sen}\alpha-i\cos\alpha)$$

(22) Demostrar que: Si $z_1+z_2=z_1+z_3$, Entonces $z_2=z_3$ (Propiedad de cancelació para la suma)

Desarrollo

Como $z_1\in C \Rightarrow \exists\ -z_1\in C$ tal que $z_1+(-z_1)=(0,0)$

Luego $z_1+z_2=z_1+z_3 \Rightarrow -z_1+(z_1+z_2)=-z_1+(z_1+z_3)$

$\Rightarrow (-z_1+z_1)+z_2=(-z_1+z_1)+z_3$

$\Rightarrow 0+z_2=0+z_3 \Rightarrow z_2=z_3$

(23) Demostrar que: Si $z_1\neq 0$ y si $z_1z_2=z_1z_3$ Entonces $z_2=z_3$ (Propiedad de cancelació para la multiplicación)

Desarrollo

Como $z_1\neq 0 \Rightarrow \exists\ z_1^{-1}$ tal que $z_1.z_1^{-1}=1$

Luego $z_1.z_2=z_1.z_3 \Rightarrow z_1^{-1}.(z_1.z_2)=z_1^{-1}.(z_1.z_3)$

$\Rightarrow 1.z_2=1.z_3 \Rightarrow z_2=z_3$

(24) Si $z_1.z_2=0$ entonces $z_1=0$ o $z_2=0$

Desarrollo

Suponiendo que $z_1\neq 0 \Rightarrow \exists\ z_1^{-1}$ tal que $z_1.z_1^{-1}=1$

Como $z_1.z_2=0 \Rightarrow z_1^{-1}.(z_1.z_2)=z_1^{-1}.0$

$\Rightarrow (z_1^{-1}z_1).z_2=0 \Rightarrow 1.z_2=0$ de donde $z_2=0$

en forma similar para $z_1=0$

Suponiendo que $z_2\neq 0 \Rightarrow \exists\ z_2^{-1}$ tal que $z_2.z_2^{-1}=1$

Como $z_1.z_2=0 \Rightarrow z_2^{-1}.(z_1.z_2)=z_2^{-1}.0$

$\Rightarrow (z_2^{-1}z_2)z_1=0 \Rightarrow 1.z_1=0$ de donde $z_1=0$

$$Re^2(z)+Im(z)^2\ge 2|Re(z)|.|Im(z)| \qquad \dots (2)$$

por lo tanto de (1) y (2) se tiene: $\|z\|^2\ge 2|Re(z)|.|Im(z)|$

(27) Demostrar que: $\sqrt{2}\|z\|^2\ge|Re(z)|+|Im(z)|$

Desarrollo

Como $\|z\|^2\ge 2|Re(z)|.|Im(z)|$ sumando $\|z\|^2$

$$2\|z\|^2\ge\|z\|^2+2|Re(z)|.|Im(z)|$$

$$2\|z\|^2\ge|Re(z)|^2+|Im(z)|^2+2|Re(z)|.|Im(z)|$$

25. Hallar dos números complejos z_1 y z_2 cuya suma sea el número real x y cuya diferencia sea el número imaginario iy.

Desarrollo

Por condición del problema se tiene: $\begin{cases} z_1 + z_2 = x & (1) \\ z_1 - z_2 = iy & (2) \end{cases}$

Sumando (1) y (2) se tiene: $2z_1 = x + iy$ de donde $z_1 = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}i$

restando (1) y (2) se tiene: $2z_2 = x - iy$ de donde $z_2 = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}i$

26. Demostrar que: $\|z\|^2 \geq 2\,|Re(z)|.|Im(z)|$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$, además $Re(z) = x$, $Im(z) = y$

Luego $\|z\| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \Rightarrow \|z\|^2 = |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2$ ... **(1)**

como $(|Re(z)| - |Im(z)|)^2 \geq 0$, de donde

$2\|z\|^2 \geq (|Re(z)| + |Im(z)|)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\,\|z\| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$

28. Probar que $|\frac{Re(z)+Im(z)}{\sqrt{2}}| \leq \|z\| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

Desarrollo

Sea $z = x + iy$ de donde $Re(z) = x$, $Im(z) = y$

Además $\|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$, la demostración del problema equivale probar que:

$|\frac{x+y}{2}| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$

como $x,y \in R$ entonces $(x-y)^2 \geq 0$, $\forall x,y \in R$

$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$$

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geq |x+y| \quad \text{de donde} \quad |\frac{x+y}{\sqrt{2}}| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Luego $|\frac{Re(z)+Im(z)}{\sqrt{2}}| \leq \|z\|$ ... **(1)**

Como $|x|.|y| \geq 0$, $\forall x,y \in R$, entonces

$2|x|.|y| \geq 0 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 + 2|x|.|y| \geq |x|^2 + |y|^2 \geq 0$

$$(|x| + |y|)^2 \geq |x|^2 + |y|^2 \geq 0$$

$$|x| + |y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$Re(z) + Im(z) \geq \|z\|$$

Luego $\|z\| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$ ... **(2)**

de (1) y (2) se tiene: $|\frac{Re(z)+Im(z)}{\sqrt{2}}| \leq \|z\| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

29. Hallar z tal que: $\|z\| - z = 1 + 2i$

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2+y^2}$, al reemplazar se tiene:

$\sqrt{x^2+y^2} - x - iy = 1 + 2i$, por igualdad

$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = -2 \\ \sqrt{x^2+4} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{matrix}$. Luego $z = \frac{3}{2} - 2i$

30. Si $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, $z^n = 1$, $z \neq 1$ y $M = 1 + 2z + 3z^2 + ... + n.z^{n-1}$. Hallar Re(M) y Im(M)

Desarrollo

Como $M = 1 + 2z + 3z^2 + ... + n.z^{n-1}$, multiplicando por z

$zM = z + 2z^2 + 3z^3 + ... + n.z^n$, ahora restando se tiene

$M - zM = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} - nz^n$ ... (1)

como $z^n = 1 \Rightarrow z^n - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z^2 + z + 1) = 0$

como $z \neq 1$ $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z^2 + z + 1 = 0$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $M - zM = 0 - nz^n$

$M(1-z) = -n.z^n$ de donde $M = -\frac{n}{1-z}$ puesto que $z^n = 1$

Como $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, entonces

$$M = \frac{-n}{1-\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta} = \frac{-n}{(1-\cos\theta) - i\,\text{sen}\,\theta} = \frac{-n}{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2} - 2i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$M = \frac{-n}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}(\text{sen}\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2})} = \frac{-n(\text{sen}\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2})}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}} = -\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\text{ctg}\frac{\theta}{2}i$$

de donde $Re(M) = -\frac{n}{2}$ y $Im(M) = -\frac{n}{2}\text{ctg}\frac{\theta}{2}$

31. Si $w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Hallar $(1+w)^n$

Desarrollo

$$1 + w = 1 + \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}i = 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\frac{\theta}{2})$$

$$(1+w)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}(\cos\frac{n\theta}{2} + i\,\text{sen}\frac{n\theta}{2}) = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

32. Simplificar $(1+w)^n$, donde $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}$

Desarrollo

$$1 + w = 1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} = 2\cos^2\frac{\pi}{3} + 2\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}i$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$(1+w)^n = (\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3})^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{n\pi}{3} = e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

33. Hallar la suma de $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 3x + ... + \text{sen}^2(2n-1)x$

Desarrollo

$$A + iB = z^2.\frac{2\,\text{sen}\,2nx}{2\,\text{sen}\,2x}(\frac{\text{sen}\,2nx - i\cos 2nx}{\text{sen}\,2x - i\cos 2x}) = z^2\frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 2nx) - i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2} - 2nx)}{\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) - i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2} - 2x)}]$$

$$= \frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}(\cos 2x + i\,\text{sen}\,2x)[\cos(-2nx + 2x) - i\,\text{sen}(2nx - x)]$$

Aplicando la identidad $\text{sen}\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$

$\text{sen}^2 x+\text{sen}^2 3x+\text{sen}^2 5x+...+\text{sen}^2(2n-1)x$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 10x}{2}+...+\frac{1-\cos 2(2n-1)}{2}$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x+...+\cos 2(2n-1))$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x+...+\cos 2(2n-1)) \quad ...(1)$$

A = cos 2x + cos 6x + cos 10x + ... + cos 2(2n − 1)x

B = sen 2x + sen 6x + sen 10x + ... + sen 2(2n − 1)x

iB = i sen 2x + i sen 6x + i sen 10x + ... + i sen 2(2n − 1)x

ahora sumando A y iB se tiene:

A+ iB = (cos 2x+i sen 2x)+(cos 6x+i sen 6x) + ...+(cos 2(2n−1)+i sen 2(2n−1))

$$=z^2+z^6+z^{10}+...+z^{2(2n-1)}$$

donde $z=\cos x+i\,\text{sen}\,x \Rightarrow z^n=\cos nx+i\,\text{sen}\,nx$

$$A+iB=z^2(1+z^4+z^8+...+z^{4(n-1)})=z^2(\frac{1+(z^4)^n}{1+z^4})=z^2(\frac{1-\cos 4nx-i\,\text{sen}\,4nx}{1-\cos 4x-i\,\text{sen}\,4x})$$

$$=z^2(\frac{2\,\text{sen}^2 2nx-2i\,\text{sen}\,2nx\cos 2nx}{2\,\text{sen}^2 2x-2i\,\text{sen}\,2x.\cos 2x})$$

$$=\frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}[\cos(2x-2nx-2x)+i\,\text{sen}(2nx-2x+2x)]=\frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}[\cos 2nx-i\,\text{sen}\,2nx]$$

$$A=\frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}\cos 2nx=\frac{\text{sen}\,4nx}{2\,\text{sen}\,2x} \quad y \quad B=\frac{\text{sen}\,2nx}{\text{sen}\,2x}\text{sen}\,2nx=\frac{\text{sen}^2 2nx}{\text{sen}\,2x}$$

1.15. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Hallar los números reales x e y tal que: 2x − 3iy − 2y − 5 − 10i = (x + y − 2) − (y − x + 3)

(2) Que valores han de tomar x e y para satisfacer la ecuación

(2 − 5i)x + (1 + 3i)y − 8 + 9i = 0

(3) Halle las soluciones reales de las ecuaciones

a) (3x − i)(2 + i) + (x − iy)(1 + 2i) = 5 + 6i

b) (4 + 2i)x + (5 − i)y = 13 + i

c) $(x-iy)(a-bi)=i^3$, donde a y b son números reales | a | ≠ | b |

(4) Hallar los valores de a y b si (a + b) + (a − b)i = 7 + 2i

(5) Hallar los valores de a y b si: $(a+b)+(a-b)i=(2+5i)^2+i(2-3i)$

(6) Resolver el sistema de ecuaciones en C. $\begin{cases}(1+i)x-iy=2\\(2+i)x+(2-i)y=2i\end{cases}$

(7) Resolver el sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases}x+iy=1\\ix+y=1+i\end{cases}$ b) $\begin{cases}(1-i)x+2iy=3\\4x+(1-i)y=2+i\end{cases}$

(8) Resolver el sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\(3+2i)x+(3-2i)y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}(3+i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$

(9) Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases}x+iy-2z=10\\x-y+2iz=20\\ix+3iy-(1+i)z=30\end{cases}$

(10) Resolver el sistema de ecuaciones, suponiendo que x, y, z, t ∈ R.

$$\begin{cases}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i\\(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i\end{cases}$$

(11) Si z = x + iy, donde x, y ∈ R, hallar los valores de x e y cuando $\frac{3z}{1-i}+\frac{3z}{i}=\frac{4}{3-i}$

(12) Efectuar las siguientes operaciones y el resultado expresar en la forma binomica.

a) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ b) $\frac{1+3i}{i(4-3i)}+\frac{2}{i}$ c) $(\frac{1+i}{1-i})^2+(\frac{1-i}{1+i})^3$

d) $\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}$ e) $\frac{(1-i)^5-1}{(i+i)^5+1}$ f) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

(13) Comprobar que:

a) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\frac{i}{2}$ b) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=-\frac{2i}{5}$

(14) Si x e y son números reales, resolver la ecuación $\frac{ix}{1+iy}=\frac{3x+4i}{x+3y}$

(15) Demostrar que $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$, (x es real)

(16) Expresar x e y, mediante u y v si: $\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{u+iv}=1$, donde u, v, x, y, son reales

(17) Si z = (a,b) y w = (c,d) resolver el sistema iz + (1 + i)w = 3 + i; $(1+i)\bar{z}-(6-i)\bar{w}=4$

(18) Demostrar si θ es un ángulo arbitrario, entonces: $\frac{1}{\cos\theta\pm i\,sen\theta}=\cos\theta\mp i\,sen\theta$

(19) Reducir las siguientes expresiones algebraicas a la forma a + bi.

a) $\frac{1+i}{(3-i)(1-i)}$ b) (1 + i)(2 − i)(1 − i) c) $\frac{12+8i}{2-3i}+\frac{52+13i}{13i}$

d) $[\frac{34}{(1-4i)(5+3i)}]^2$ e) $\frac{i\,\text{Re}(z)}{\text{Im}(iz)}$ f) $\frac{(1+i)(1+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$

g) $\frac{1}{(a+bi)^2}+\frac{1}{(a-bi)^2}$ h) $(2\sqrt{3}+2i)(3-3\sqrt{3}i)$ i) $\frac{8+8\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}+2i}$

(20) Demostrar que:

a) $\overline{z+3i}=z-3i$ b) $\overline{iz}=-i\bar{z}$ c) $\frac{\overline{(2+i)^2}}{3-4i}=1$

(21) Si a y b son números reales, demostrar que: $\|\frac{a+bi}{b+ai}\|=1$

(22) Resolver las siguientes ecuaciones en z

a) iz = 1 b) (1 + iz) = i c) (2 − i)z = 1

(23) Si z = x + iy, hallar:

a) $\text{Re}(\frac{1}{z})$ b) $\text{Im}(\frac{1}{z})$ c) $\text{Im}(z^3)$

d) $\text{Re}(\frac{1}{z^2})$ e) $\text{Re}(z^2+z)$ f) Re(-iz)

g) $\text{Im}(4iz^2-6z+8i)$ h) $\text{Re}(\frac{1}{z}-i)$

(24) Indicar que líneas se determinan por las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{Im}(z^2) = 2$ b) $\operatorname{Re}(z^{-2}) = 1$ c) $\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \operatorname{Im}(z)$ e) $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$

(25) Comprobar la identidad $x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$

(26) Calcular $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un entero positivo

(27) Analizar si el polinomio $P(x) = x^n \operatorname{sen} x - \lambda^{n-1} x \operatorname{sen}(n\alpha) + \lambda^n \operatorname{sen}(n-1)\alpha$ es divisible por: $x^2 - 2\lambda x \cos\alpha + \lambda^2$

(28) Halle todos los valores reales de x y los valores correspondientes a "w" que hacen que el número complejo $w = (x - i)[(x+3) - 4i]$ sea imaginario puro.

(29) Demostrar que si $\forall z \in C$, $z^2 = \bar{z}^2$ entonces "z" es real e imaginario puro.

(30) Hallar el número complejo z, tal que sea conjugado con su cubo.

(31) Hallar el número complejo z, tal que sea conjugado con su cuadrado.

(32) Hallar el lugar geométrico de los puntos, tal que: $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$

(33) Demuestre que:
a) $\operatorname{Re}(z\bar{w} + \bar{z}w) = z\bar{w} + \bar{z}w$, $z, w \in C$
b) $\operatorname{Im}(z\bar{w} - \bar{z}w) = z\bar{w} - \bar{z}w$, $z, w \in C$

(34) Escribir en forma compleja las ecuaciones

a) $x^2 - y^2 = a^2$ b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(35) Demostrar que si $z_1 z_2 z_3 = 0$, entonces al menos uno de los factores es nulo.

(36) Demostrar que: $\| z - \frac{3i}{4} \| = \frac{1}{4}$ si $z = \frac{1-a}{1+2ai}$, $a \in R$

(37) Demostrar que: $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = \frac{1}{2}(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2)$

(38) Demostrar que: $\operatorname{Im}(z_1 \overline{z_2}) = \frac{1}{2i}(z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2)$

(39) Sean $z, w \in C$ / $zw \in R$, $zw \neq 0$ entonces $\exists k \in R$ / $z = k\bar{w}$

(40) Calcular $\bar{z}^2$ siendo $z = -\| -1 + i \| + \sqrt{3}i$

(41) Dado $z = 1 + \operatorname{sen} a + i \cos a$, determinar $\| z^2 - \bar{z} \|$

(42) Si $z, w \in C$, demostrar que: $\operatorname{Im}(\frac{z}{z+w}) + \operatorname{Im}(\frac{w}{z+w}) = 0$

(43) Hallar todos los $z \in C$ tales que $z(1 + ai) = 1 - ai$

(44) Hallar todos los $z \in C$ tales que $\operatorname{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0$

(45) Describir y construir la gráfica del lugar representado por cada una de las ecuaciones

a) $\| z \| - z = 1 + 2i$ b) $\| z + i \| = 2 \operatorname{Im}(z)$

c) $\| z + 1 \| + \| z - 1 \| = 3$ d) $\| z - 3 \| - \| z + 3 \| = 4$

e) $\| z - 1 + i \| = 2$ f) $\| z - i \| - \| z + i \| = 2$

g) $\| z - 2 \| = \| 1 - 2\bar{z} \|$ h) $\| z \| - 3 \operatorname{Im}(z) = 6$

(46) Si $\| z + 16 \| = 4 \| z + 1 \|$, calcular $\| z \|$

(47) Si $\| z \| = 1$, probar que $\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} = 1$, para todo $a, b \in C$

(48) Hallar la expresión cartesiana de $\| z - 3 \| + \| z + 3 \| = 10$ y graficar la región $\| z - 3 \| + \| z + 3 \| \leq 10$

(49) Indicar que líneas se determinan por las siguientes ecuaciones:

a) $\| z - i \| + \| z + i \| = 4$ b) $\| z + i \| = 2 \operatorname{Im}(z)$

c) $\operatorname{Re}(1 + z) = \| z \|$ d) $\| z - i \| = \frac{\operatorname{Re}(z)}{2}$

(50) Si $\| z - i \| + \| z + i \| = 2a$, $a > 0$, probar que $\| z \| \leq a$

(51) Demostrar que si $\| z - 4i \| + \| z + 4i \| = 10$, es una elipse.

(52) Que lugar describe el punto $z = x + iy$, cuando satisface a las siguientes ecuaciones

a) $\| z - 2 \| + \| z \| = 4$ b) $\| z - 2 \| - \| z \| = 2$

c) $\| z - 2 \| - \| z \| = -1$ d) $\| z - i \| + \| z + i \| = 5$

e) $\bar{z} + z = \| z \|^2$ f) $\| \frac{z-2}{z-1} \| = 4$

(53) Mostrar que la ecuación de una recta es determinado por dos puntos z_1 y z_2 que cumple con la ecuación $\operatorname{Im}(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}) = 0$

(54) Determinar analíticamente y gráficamente los sub conjuntos de C que verifican

a) $\| z + 1 \| + \| z - 1 \| = 3$ b) $\| z + c \| . \| z - c \| = c^2$

c) $\| z + 3 \| + \| z - 3 \| = 10$ d) $3 \| z \| - \operatorname{Re}(z) = 12$

(55) Mostrar que una ecuación para una circunferencia que pasa por 3 puntos z_1, z_2, z_3 esta dado por: $(\frac{z - z_1}{z - z_2}) / (\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = (\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2}) / (\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2})$

(56) Hallar z tal que $\| z \| + z = 2 + i$

(57) Si $z, w \in C$ tal que $\| z \| = \| w \| = 1$, $zw \neq 1$, verifican que $\| \frac{z - \bar{w}}{1 - zw} \| = 1$

(59) Si z, w son números complejos y $u = \sqrt{zw}$, probar que

$$\| z \| + \| w \| = \| \frac{z + w}{2} - u \| + \| \frac{z + w}{2} + u \|$$

(60) Demostrar que: $\| z_1 \| + \| z_2 \| = \| \frac{z_1 + z_2}{z_1} - (z_1 z_2)^2 \| + \| \frac{z_1 + z_2}{z_1} + (z_1 z_2)^2 \|$

(61) ¿Qué curva determina la ecuación $\| z + c \| + \| z - c \| = 2a$, donde a y $c \in R^+$, $a > c$?

(62) ¿Qué curva del plano XOY se determina por la ecuación $z\bar{z} + i(\bar{z} - z) - 2 = 0$?

(63) Si $w = \frac{i(1 - z)}{1 + z}$, demuestre que si $\| z \| < 1$ implica $\operatorname{Im}(w) > 0$

(64) Determinar la región que describe la relación siguiente:

a) $\| z - 1 \| \leq \operatorname{Re}(z)$ b) $0 < \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$

c) $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ d) $0 < \arg(\frac{1}{z}) \leq \frac{\pi}{2}$

e) $1 \leq \| z + 2 + i \| \leq 2$ f) $\| z - 2 + i \| \leq 1$

g) $| \operatorname{Re}(z) | \leq \| z \|$ h) $\| z \| > 2 + \operatorname{Im}(z)$

(65) Describir gráficamente la región representada por:

a) $\| z \| - 2 + \operatorname{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z) \leq 2$

b) $\| z - 1 - i \| \leq 2 - \operatorname{Im}(\bar{z}) \ \wedge \ \| z - 1 + \frac{i}{2} \| \leq 2$

c) $\operatorname{Im}[(z - 1 + i)^2] \geq 2 \ \wedge \ \| z - 1 + i \| \leq 3$

(66) Hallar el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos z que

(58) Sea $P > 0$ y $P \neq 1$, probar que $\| \frac{1-z}{1+z} \| = P$, representa a una circunferencia.

satisface a las desigualdades.

a) $\| z \| < 2$ b) $\| z - i \| \leq 1$ c) $\| z - 1 - i \| < 1$

(67) Si $z = x + iy$, siendo x e y reales, demostrar que el lugar geométrico $\| \frac{z-2}{z+2} \| = 2$ es una circunferencia y determinar su centro y su radio.

(68) Describir geométricamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades.

a) $1 \leq \| z + 1 \| \leq 2$
b) $\| z + 3i \| > 4$
c) $\| z + 2 - 3i \| + \| z - 2 + 3i \| < 10$
d) $4 < \| z - 1 \| + \| z + 1 \| < 5$
e) $-2 \leq \text{Im}(z) \leq 3 \ \wedge \ 1 \leq \text{Re}(z) \leq 5$
f) $-2 \leq \text{Im}(z) \leq 2 \ \wedge \ -2 \leq \text{Re}(z) \leq 2$
g) $\| z \| \leq \| 2z + 1 \|$
h) $\| z - i \| \leq \| z + i \|$

(69) Sea $w = \frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c, d ∈ R, demostrar que: $w - \overline{w} = \frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{\| cz+d \|^2}$, $z \in C$

(70) Hallar las $z = x + iy$, que satisfacen la condición dada:

a) $\| z - 3i \| - \| z + 2i \| < 9$
b) $\| 1 + z^2 \| < \| 2z \|$
c) $\| z + 2 \| - \| z - 2 \| > 5$
d) $\| z - 3 \| + \| z - 4 \| \leq 5$
e) $\| \frac{z-2}{z+2} \| < 2$
f) $\| \frac{z-2}{z+2} \| > 2$
g) $4 \leq \| z - 1 \| + \| z + 1 \| \leq 8$
h) $\| z^2 - 1 \| \geq a^2$, $a > 0$

(71) Si z se encuentra fuera de la circunferencia $C = \{z \in C \,/\, \| z \| = 2\}$ probar que $\| e^{z^2+2z-3} \| > 1$

(72) Si z se encuentra dentro de la circunferencia $C = \{z \in C \,/\, \| z \| = 2\}$ demostrar que $\| e^{\overline{z}^2+2z-3} \| < 1$

(73) Hallar el lugar geométrico representado por la desigualdad $\frac{1}{4} < \text{Re}(\frac{1}{z}) + \text{Im}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$

(74) Demostrar la identidad: $\| z_1 + z_2 \|^2 + \| z_1 - z_2 \|^2 = 2(\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2)$

(75) Demostrar que $\forall z \in C$, $\| \frac{1}{1-z} \| \geq \frac{1}{1+\| z \|}$

(76) Demostrar que: $\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 \geq \overline{z_1} z_2 + z_1 \overline{z_2}$

(77) Partiendo de consideraciones geométricas, verificar que:

a) $\| \frac{z}{\| z \|} - 1 \| < | \arg(z) |$, $z \neq 0$
b) $\| z - 1 \| \leq | \, \| z \| - 1 \, | + \| z \| \, | \arg(z)$

(78) Si $z, w \in C$, $z \neq w$, Probar que: $\frac{\| z \| w \| + w \| z \| \|}{\| z + w \|} \leq \frac{2 \| zw \|}{\| z \| + \| w \|}$

(79) Probar que cuando $\| z_3 \| \neq \| z_4 \|$, $\| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \| \leq \frac{\| z_1 \| + \| z_2 \|}{| \| z_3 \| - \| z_4 \| |}$

(80) Probar que si $z_1, z_2 \in C$, entonces: $\text{Re}(z_1 z_2) = R(z_1)\text{Re}(z_2) - \text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)$

(81) Si $z = x + iy$, probar que: $| x | + | y | \leq \sqrt{2} \| x + iy \|$

(82) Si $z, w \in C$, probar la desigualdad $\| \frac{z}{z+w} \| \leq \frac{\| z \|}{| \| z \| - \| w \| |}$, $\forall z,w \in C$, $z,w \neq 0$

(83) Si $\| z_1 \| < 1$ y $\| z_2 \| < 1$ probar que: $\| z_1 + z_2 \| < \| 1 - \overline{z_1} z_2 \|$

(84) Demostrar que: $\| z_1 + z_2 \| \geq \frac{1}{2}(\| z_1 \| + \| z_2 \|) \| \frac{z_1}{\| z_1 \|} + \frac{z_2}{\| z_2 \|} \|$

(85) Si $\| z_1 \| \leq 1$ y $\| z_2 \| \leq 1$ Probar que $\| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \| \leq 1$ ¿En que caso se cumple la igualdad?

(86) Demostrar que: $\frac{\| z + w \|}{1 + \| z + w \|} \leq \frac{\| z \|}{1 + \| z \|} + \frac{\| w \|}{1 + \| w \|}$, $\forall z,w \in C$

(87) Demostrar que: $\forall z \in C$, se tiene: $\| e^z - 1 \| \leq e^{\| z \|} - 1 \leq \| z \| e^{\| z \|}$

(88) Si $z, w \in C$, tal que $\text{Im}(z) > 0$, $\text{Im}(w) > 0$. Probar que $\| \frac{z - w}{z - \overline{w}} \| < 1$

(89) Sean $x, u, w \in C \,/\, x + u + w = 0$ y $\| x \| = \| u \| = \| w \|$. Verificar que los puntos x, u, w son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 1.

(90) Si $0 \leq \| z \| < 1$, $\forall z \in C$, demostrar que $\| e^z - 1 \| \leq 2 \| z \|$

(91) Demostrar que: $\sum_{k=0}^{2n-1} z^k = \frac{1 - z^{2n}}{1 - z}$, $z \in C - \{1\}$

(92) Probar que para todo $z_1, z_2, w_1, w_2 \in C$

$\| z_1 w_1 + z_2 w_2 \|^2 \leq (\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2)(\| w_1 \|^2 + \| w_2 \|^2)$

(93) Probar que: $| \| z_1 \| - \| z_2 \| | \leq \| z_1 - z_2 \|$

(94) Demuestre que $| \frac{\| z_1 \| - \| z_2 \|}{\| z_1 + z_2 \|} | \leq 1$, para $z_1 + z_2 \neq 0$

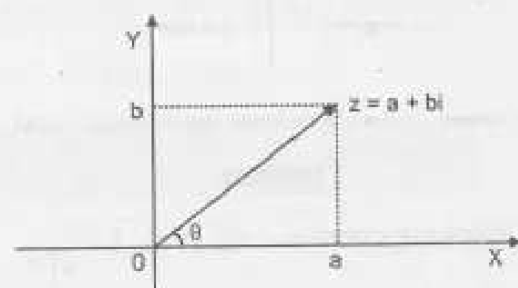
(95) Demuestre que si "k" es una constante real positivo, entonces la ecuación $\| \frac{z+1}{z-1} \| = k$ representa a un círculo si $k \neq 1$ y una recta si $k = 1$.

(96) Sean $a, b \in C$, $w = \frac{a-b}{1-a\overline{b}}$. Demostrar que $w\overline{w} = \frac{\| a \|^2 + \| b \|^2 - (a\overline{b} + \overline{a}b)}{1 + \| a \|^2 + \| b \|^2 - (a\overline{b} + \overline{a}b)}$ y que $\| a \| < 1 \Leftrightarrow \| w \| < 1$

(97) Si $0 \leq \| z \| \leq 1$, probar que $\frac{1}{…} \| z \| \leq \| e^z - 1 \| \leq \frac{7}{…} \| z \|$

1.16. FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Sea $z = a + bi$, un número complejo distinto de cero, entonces el módulo de z es $r = \| z \| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$



Denotaremos por θ el ángulo formado por el segmento orientado que representa al número complejo z, con el eje X, en sentido antihorario.

Luego del gráfico se tiene: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$, de donde $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Como $z = a + bi$, al reemplazar a y b se tiene: $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Que es llamado forma trigonométrica o forma polar del número complejo z.

(98) Sean a y b dos constantes complejas. Si $b \neq 0$, probar que $a + \bar{a} + b\bar{z} + \bar{b}z = 0$ es la ecuación de una recta, donde z es una variable compleja.

(99) Sean a, b y c tres constantes complejas, z una variable compleja probar que $a + \bar{a} + b\bar{z} + \bar{b}z + (c - \bar{c})z\bar{z} = 0$ es la ecuación de una circunferencia.

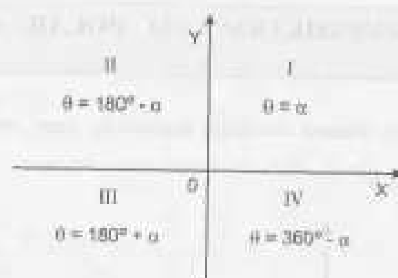
(100) Si $\|a_i\| < 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ probar que $\|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n\| < 1$

Al ángulo θ se le llama argumento de z y $r = \|z\|$ es el módulo de z que denotaremos por:

$$\theta = \arg(z), \quad r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

por lo tanto: $z = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad y \quad \theta = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$$



Ejemplo.- Expresar $z = 1 + \sqrt{3}i$ en forma trigonométrica o polar.

Desarrollo

Calculamos su módulo y su argumento $r = \|z\| = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{1}) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$



$z = 1 + \sqrt{3}i = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$z = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

Ejemplo.- Expresar $z = -3 + \sqrt{3}i$ en forma trigonométrica o polar

Desarrollo

Calculando su módulo y su argumento, $r = \|z\| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = |Z| = 2\sqrt{3}$

$\theta = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{-3})$ de donde $\theta \in$ 2do. cuadrante.

Es decir $\theta = 180° - \alpha$, donde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$

$z = -3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6})$

1.17. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR.-

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

Dos números complejos en su forma trigonométrica, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Si $z_2 \neq (0,0)$ y $r_2 \neq (0,0)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Ejemplo.- Si $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$ y $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})$

Entonces $Z_1 Z_2 = (3)(4)[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})] = 12(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})}{3(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})} = \frac{4}{3}[\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})] = \frac{4}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$$

1.18. POTENCIAS Y RAICES DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

TEOREMA (FÓRMULA DE MOIVRE)

Para todo $z = a + bi$ y todo entero positivo n se cumple la siguiente relación.

$$(a + bi)^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Llamada fórmula de MOIVRE

Demostración

La demostración lo haremos por inducción

i) Para $n = 1$, $a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

ii) Para $n = h$, $(a + bi)^h = r^h(\cosh\theta + i \operatorname{senh}\theta)$

iii) Para $n = h+1$,

$$(a + bi)^{h+1} = (a + bi)^h(a + bi) = r^h(\cosh\theta + i \operatorname{senh}\theta) r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$= r^{h+1}(\cos(h\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(h\theta + \theta)) = r^{h+1}[\cos(h+1)\theta + i \operatorname{sen}(h+1)\theta]$$

Por lo tanto se cumple la fórmula para todo entero positivo n.

Ejemplo.- Calcular $(1 + \sqrt{3}i)^7$

Desarrollo

$z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{1+3} = 2$ y $\theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

$(1 + \sqrt{3}i)^7 = 2^7(\cos\frac{7\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}) = 128(\cos\frac{7\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{3})$

Como $w = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ se tiene: $w = r^{1/n}[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}]$

como w es la raíz n – ésima de z, se tiene:

$$Z^{1/n} = r^{1/n}[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}] \quad \text{para } k = 0, 1, 2, ..., n - 1$$

Ejemplo.- Hallar las raíces de $(-4 + 4i)^{1/5}$

Desarrollo

Calculando su módulo y su argumento

$z = -4 + 4i \Rightarrow r = \|z\| = 4\sqrt{2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{4}{-4}) \Rightarrow \theta \in$ 2do. cuadrante

Luego $\theta = 180° - \alpha$, donde $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

Por lo tanto $\theta = 180° - 45° \Rightarrow \theta = 135°$

TEOREMA.- Si z = a + bi es un número complejo y n es un entero positivo. La raíz n − ésima de z es:

$$z^{1/n} = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}]$$ para valores de k = 0,1,...,n − 1

Demostración

Sea $w = x + iy$, la raíz n −ésima de z

Es decir: $w^n = z$ pero como $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$; $w = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

$(x+iy)^n = a+bi$, reemplazando se tiene: $\rho^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

de donde $\rho^n = r$, $\alpha n = \theta + 2k\pi$, k = 0,1,2,..., n − 1

Luego $\rho = r^{1/n}$, $\alpha = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, k = 0,1,2,..., n − 1

$$(-4+4i)^{1/5} = (4\sqrt{2})^{1/5}[\cos\frac{135°+2k\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{135°+2k\pi}{5}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{135°+2k\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{135°+2k\pi}{5}]$$

para k = 0, $w_1 = \sqrt{2}(\cos 27° + i\,\text{sen}\,27°)$

k = 1, $w_2 = \sqrt{2}(\cos 99° + i\,\text{sen}\,99°)$

k = 2, $w_3 = \sqrt{2}(\cos 171° + i\,\text{sen}\,171°)$

k = 3, $w_4 = \sqrt{2}(\cos 243° + i\,\text{sen}\,243°)$

k = 4, $w_5 = \sqrt{2}(\cos 315° + i\,\text{sen}\,135°)$

TEOREMA.- Sea z = a + bi, definimos $z^{\frac{m}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^m$, para m y n enteros positivos, donde m y n son primos entre sí, se cumple la relación

Siguiente: $$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}[\cos\frac{m}{n}(\theta+2k\pi) + i\,\text{sen}\frac{m}{n}(\theta+2k\pi)]$$

siendo $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \text{arctg}(\frac{b}{a})$

Ejemplo.- Efectuar la operación $(1+\sqrt{3}i)^{5/6}$

Desarrollo

Calculamos $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \text{arctg}(\frac{b}{a})$

$r = \sqrt{1+3}$, $\theta = \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = 60° = \frac{\pi}{3}$

$$(1+\sqrt{3}i)^{5/6} = 2^{5/6}[\cos\frac{5}{6}(\frac{\pi}{3}+2k\pi) + i\,\text{sen}\frac{5}{6}(\frac{\pi}{3}+2k\pi)]$$

para k = 0 , $w_1 = 2^{5/6}(\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°)$

k = 1 , $w_2 = 2^{5/6}(\cos 350° + i\,\text{sen}\,350°)$

k = 2 , $w_3 = 2^{5/6}(\cos 290° + i\,\text{sen}\,290°)$

k = 3 , $w_4 = 2^{5/6}(\cos 230° + i\,\text{sen}\,230°)$

k = 4 , $w_5 = 2^{5/6}(\cos 170° + i\,\text{sen}\,170°)$

k = 5 , $w_6 = 2^{5/6}(\cos 110° + i\,\text{sen}\,110°)$

1.19. EXPONENCIALES COMPLEJOS (FÓRMULA DE EULER).-

Por el momento admitiremos la definición de la exponencial real.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

que más adelante demostraremos, en dicha expresión observamos que:

$e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x e^y$

Definimos la exponencial compleja por: $e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$ (e: número de Euler) que es llamado la fórmula de Euler.

Si z = x + iy ⇒ $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$

Cuando y = 0, $e^z = e^x$ se obtiene la función exponencial real.

Cuando x = 0, $e^z = e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen}\,y$, se obtiene la fórmula de Euler.

PROPIEDADES.- Sean z, w ∈ C

P_1. $e^{z+w} = e^z e^w$ P_2. $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

P_3. Si $e^z = 1$ ⇒ z = 2nπi, n es un entero. P_4. $(e^z)^n = e^{nz}$, n es un entero

Si en la fórmula de Euler sustituimos x por −x, es decir:

$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$ se obtiene: $e^{-ix} = \cos(-x) + i\,\text{sen}(-x)$

de donde: $e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}\,x$

Luego $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x \\ e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}\,x \end{cases}$ Sumando

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, ósea que: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

en forma similar para el sen x

$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x \\ e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}\,x \end{cases}$, restando se tiene:

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,\text{sen}\,x$, de donde $\text{sen}\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Por lo tanto: $\text{sen}\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{}$

1.20. LOGARITMO EN C.-

La exponencial compleja $z = re^{i\theta}$ es un número complejo, el valor de θ se denomina argumento principal de z, que denotaremos por: θ = arg(z)

Para todo complejo z ≠ 0, le corresponde solamente un valor de θ con 0 ≤ θ ≤ 2π.
Sin embargo cualquier otro intervalo de longitud 2π por ejemplo −π ≤ θ ≤ π se puede emplear.

El logaritmo complejo es la inversa de la exponencial compleja, es decir:

Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo ⇒ ∃ w∈C único tal que r = ||z|| y θ = arg(z)

Estas fórmulas sirven para el estudio de las funciones trigonométricas.

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ entonces $z = re^{i\theta}$ es la fórmula exponencial del complejo, donde $r = \|z\|$ y θ se denomina argumento de z que es denotado por $\theta = \arg(z)$

Ejemplo.- Si $z = e^{i\theta} \Rightarrow \|z\| = 1$

Desarrollo

Como $z = e^{i\theta} \Rightarrow z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ de donde

$\|z\| = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} = 1 \Rightarrow \|z\| = 1$

Ejemplo.- Probar que: $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

Desarrollo

$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i = i \qquad \therefore \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

Generalizando se tiene: $\ln z = w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$

El valor principal de ln z es el que se obtiene cuando k = 0, es decir: V.P. de ln $z = \ln r + i\theta$

Ejemplo.- Hallar ln z, donde $z = 1 - i$

Desarrollo

$z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$

$\ln z = \ln(1-i) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + (\frac{7}{4} + 2k)\pi i$

y el V.P. de $\ln Z = \ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4}i$

1.21. EXPONENCIAL COMPLEJA GENERAL.-

Sean z_1 y z_2 donde $z_1 \neq 0$, entonces consideremos la exponencial compleja $w = z_1^{z_2}$, aplicando logaritmos en base natural se tiene:

$\ln w = \ln z_1^{z_2} = z_2 \ln z_1$, y por definición se tiene: $w = e^{z_2 \ln z_1}$

1.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Obtener la forma polar o trigonométrica de los siguientes números complejos.

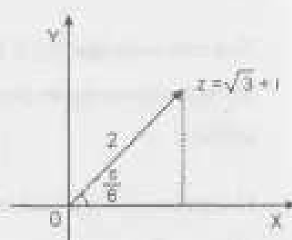
a) $z = \sqrt{3} + i$

Desarrollo

Sea $z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Donde $r = \|z\| = 2$ y $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$z = \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$



b) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

Desarrollo

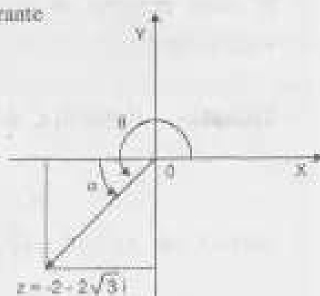
$r = \|z\| = 4$ y $\text{tg}\,\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} \Rightarrow \theta \in$ 3er cuadrante

sea α / $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Luego $\theta = 180° + \frac{\pi}{3} = 240°$

Como $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$z = 4(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°)$



c) $z = -1 - i$

Desarrollo

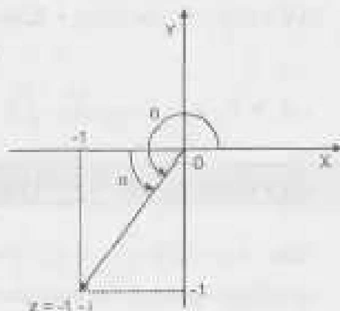
$z = -1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta \in$ 3er cuadrante

Sea α / $\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

Luego $\theta = 180° + 45° = 225°$

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ entonces $\quad z = \sqrt{2}(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°)$



d) $z = -4i$

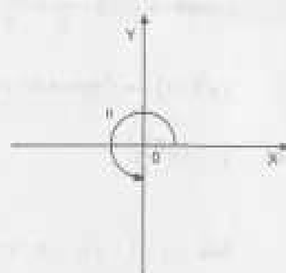
Desarrollo

$r = \|z\| = 4$

$\text{tg}\,\theta = \frac{-4}{0} \Rightarrow \theta = 270°$

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$z = 4(\cos 270° + i\,\text{sen}\,270°)$



② Calcular las potencias indicadas

a) $(1-i)^5$

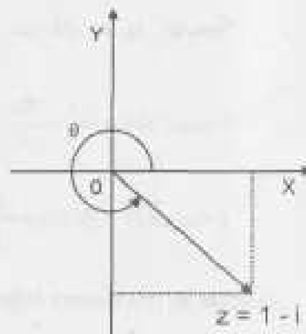
Desarrollo

Sea $z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta \in$ 4to cuadrante

Sea α / $\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Luego $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$



$(1-i)^5 = r^5(\cos 5\theta + i\,\text{sen}\,5\theta) = 4\sqrt{2}(\cos\frac{35}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{35}{4}\pi)$

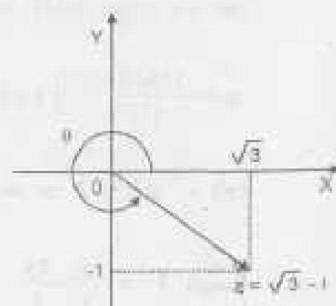
b) $(\sqrt{3} - i)^6$

Desarrollo

Sea $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow r = \|z\| = 2$

$\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in$ 4to cuadrante

Sea α / $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$



Luego $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$(\sqrt{3} - i)^6 = r^6(\cos 6\theta + i\,\text{sen}\,6\theta) = 64(\cos 11\pi + i\,\text{sen}\,11\pi)$

$(-128 + 128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}} = r^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{8})$ donde k = 0,1,2,3,4,5,6,7

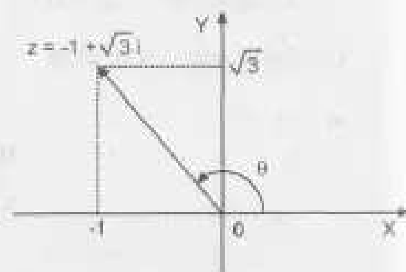
$(-128 + 128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}} = (256)^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{2\pi + 6k\pi}{24} + i\,\text{sen}\frac{2\pi + 6k\pi}{24})$

c) $(-1+\sqrt{3}i)^7$

Desarrollo

Sea $z=-1+\sqrt{3}i \Rightarrow r=\|z\|=2$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta\in$ 2to cuadrante



Sea α / $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{3}$

Luego $\theta=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

$(-1+\sqrt{3}i)^7=128(\cos\dfrac{14\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{14\pi}{3})$

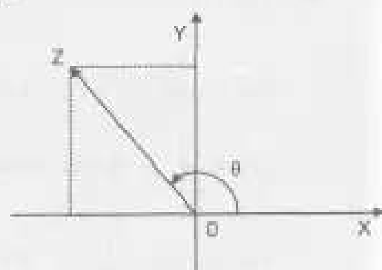
③ Efectuar las operaciones indicadas.

a) $(-128+128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}}$

Desarrollo

Sea $z=-128+128\sqrt{3}i \Rightarrow r=\|z\|=256$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{128\sqrt{3}}{-128} \Rightarrow \theta\in$ 2do. cuadrante



Sea α / $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{3}$

Luego $\theta=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

para $k=0$, $w_1=2(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12})$

$k=1$, $w_2=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3})$

$k=2$, $w_3=2(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12})$

$k=3$, $w_4=2(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6})$

$k=4$, $w_5=2(\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{12})$

$k=5$, $w_6=2(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3})$

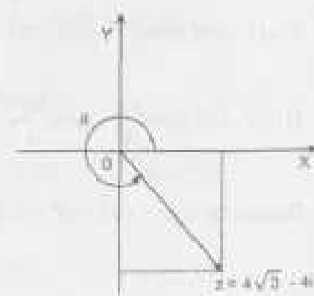
$k=6$, $w_7=2(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{19\pi}{12})$

$k=7$, $w_8=2(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6})$

b) $(4\sqrt{3}-4i)^{1/3}$

Desarrollo

Sea $z=4\sqrt{3}-4i \Rightarrow r=\|z\|=8$



$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-4}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \theta\in$ 4to. Cuadrante

Sea α / $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{6}$

Luego $\theta=2\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}$

$(4\sqrt{3}-4i)^{\frac{1}{3}}=r^{\frac{1}{3}}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{\theta+2k\pi}{3})$

$(4\sqrt{3}-4i)^{\frac{1}{3}}=2(\cos\dfrac{11\pi+12k\pi}{18}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi+12k\pi}{18})$

para $k=0$, $w_1=2(\cos\dfrac{11\pi}{18}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{18})$

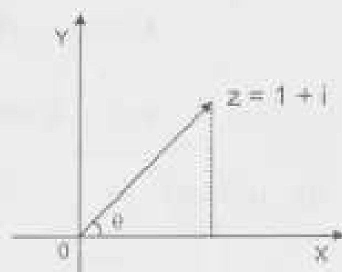
$k=1$, $w_2=2(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6})$

$k=2$, $w_3=2(\cos\dfrac{35\pi}{18}+i\operatorname{sen}\dfrac{35\pi}{18})$

④ Demostrar que: $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4})$

Desarrollo

Sea $z=1+i \Rightarrow r=\|z\|=\sqrt{2}$



$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{1}=1 \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{4}$

$(1+i)^n=r^n(\cos n\theta+i\operatorname{sen}n\theta)$

$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4})$

⑤ Demostrar que: $(\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6})$

Desarrollo

Sea $z=\sqrt{3}-i \Rightarrow r=\|z\|=2$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta\in$ 4to. Cuadrante

Sea α / $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{6}$

Luego $\theta=2\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}$ o $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$

$(\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos n\theta+i\operatorname{sen}n\theta)=2^n[\cos(-\dfrac{n\pi}{6})+i\operatorname{sen}(-\dfrac{n\pi}{6})]=2^n[\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6}]$

⑥ Calcular $(1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^n$

Desarrollo

$1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2i\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2})$

$(1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^n=[2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2})]^n=2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{n\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{n\alpha}{2})$

⑦ Demostrar que: Si $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$. Entonces $z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos(m\theta)$

Desarrollo

Si $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{1}{z}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$

aplicando MOIVRE se tiene: $z^m=\cos m\theta+i\operatorname{sen}m\theta$

$\dfrac{1}{z^m}=\cos m\theta-i\operatorname{sen}m\theta$ Sumando

$z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos m\theta$

(8) Usando la fórmula de MOIVRE, demostrar las siguientes fórmulas:

a) $\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Desarrollo

$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$ ... (1)

$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \cos^2 x + 2i \cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x$

$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + i(2\cos x \operatorname{sen} x)$ ... (2)

de (1) y (2) se tiene: $\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + i(2\cos x \operatorname{sen} x)$

De donde: $\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

b) $\operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$; $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$

Desarrollo

$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$ ... (1)

$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x + (3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x)i$ ... (2)

de (1) y (2) se tiene:

$\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x + (3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x)i$

de donde por igualdad se tiene: $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

(9) Desarrollar $\cos^3 \theta$ en términos de sen θ y cos θ de múltiplos de θ.

Desarrollo

$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \Rightarrow (z + \frac{1}{z})^3 = 8\cos^3\theta$

$8\cos^3\theta = (z + \frac{1}{z})^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3(z + \frac{1}{z}) = 2\cos 3\theta + 6\cos\theta$

$\cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$

(10) Probar que: $\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta = \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$

Desarrollo

$(2i\operatorname{sen}\theta)^3(2\cos\theta)^2 = (z - \frac{1}{z})^3(z + \frac{1}{z})^2 = (z^5 - \frac{1}{z^5}) - (z^3 - \frac{1}{z^3}) - 2(z - \frac{1}{z})$

$32i\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta = 2i\operatorname{sen} 5\theta - 2i\operatorname{sen} 3\theta - 4i\operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta = \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$

(11) Demostrar que la raíz cuadrada de $z = a + bi$ es el complejo $x + iy$, donde:

$x = \pm\sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}}$

Desarrollo

Si $x + iy$ es la raíz cuadrada de $z = a + bi \Rightarrow (x + iy)^2 = a + bi$, aplicando módulos

$\|x + iy\|^2 = \|a + bi\|$ y por definición se tiene:

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ es decir $x^2 + y^2 = \|z\|$ ... (1)

Como $(x + iy)^2 = a + bi$, desarrollando $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$, por igualdad

$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & ...(2) \\ 2xy = b & ...(3) \end{cases}$, sumando y restando (1) y (2)

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \|z\| \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = \|z\| + a \\ 2y^2 = \|z\| - a \end{cases}$, de donde $x = \pm\sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}}$

Aquí se obtiene cuatro pares de miembros reales, de los cuales seleccionamos dos de la ecuación (3).

Si $b > 0 \Rightarrow$ x, y se eligen con el mismo signo.

Si $b < 0 \Rightarrow$ x, y se eligen con distinto signo.

(12) Resolver la ecuación en C; $z^2 = 2i$

Desarrollo

Resolver esta ecuación es equivalente a sacar la raíz cuadrada.

Luego $a = 0$, $b = 2$, $\|z\| = 2$

$x = \pm\sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2 + 0}{2}} = \pm 1$; $y = \pm\sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2 - 0}{2}} = \pm 1$

como $b > 0 \Rightarrow z = \sqrt{2i} = x + iy = \pm(1 + i)$

(13) Resolver la ecuación $z^2 = -3 - 4i$

Desarrollo

Como $\|z\| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $a = -3$, $b = -4$

$x = \pm\sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} = \pm 1$; $y = \pm\sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5 + 3}{2}} = \pm 2$

Como $b < 0$, x e y se eligen con signo distinto, es decir (1,-2), (-1,2)

Luego, $z = \sqrt{-3 - 4i} = \pm(1 - 2i)$

(14) Escribir las expresiones siguientes en la forma: a + bi

a) $e^{1+\frac{\pi}{3}i}$

b) $e^{1-\frac{\pi}{4}i}$

Desarrollo

$e^{1-\frac{\pi}{4}i} = e.e^{-\frac{\pi}{4}i} = e[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4})]$

$= e[\cos\frac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}] = e(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}e}{e}(1 - i)$

(15) Si $z = 6e^{\frac{\pi}{3}i}$, Hallar el valor numérico de $|e^{iz}|$

Desarrollo

Como $z = 6e^{\frac{\pi}{3}i} = 6[\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}] = 3 + 3\sqrt{3}i$

$\Rightarrow iz = -3\sqrt{3} + 3i$, de donde $e^{iz} = e^{-3\sqrt{3}+3i} = e^{-3\sqrt{3}}(\cos 3 + i\operatorname{sen} 3)$

$|e^{iz}| = e^{-3\sqrt{3}}$

(16) Si $z = x + iy$, Hallar el lugar geométrico $\arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

Desarrollo

Se conoce $\arg(z) = \theta \Rightarrow \arg(z) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$

Si $z = x + iy \Rightarrow z + 1 = x + 1 + iy$

$\arg(z + 1) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x + 1}) = \frac{\pi}{3}$, de donde $\frac{y}{x + 1} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}(x + 1)$

(17) [illegible] Hallar la ecuación del lugar geométrico $\arg(z^2) = \frac{\pi}{[illegible]}$

Desarrollo

$$e^{1+\frac{\pi}{3}i} = e.e^{\frac{\pi}{3}i} = e(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}) = e(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Si $z = x + iy$, halle la ecuación del lugar geométrico $\arg(z^2) = \ldots \frac{\pi}{4}$

Desarrollo

Si $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\arg(z^2) = \text{arctg}(\frac{2xy}{x^2 - y^2}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2} = \text{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow y^2 = x^2 + 2xy$$

(18) Demostrar que: $\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x + \ldots + \text{sen}\,nx = \frac{\text{sen}(\frac{n+1}{2})x.\text{sen}(\frac{nx}{2})}{\text{sen}(\frac{x}{2})}$

Desarrollo

$T = \text{sen}\,x + \text{sen}\,2x + \ldots + \text{sen}\,nx$; $S = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$

Sea $\alpha = \cos\frac{x}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$, luego

$\alpha^2 = \cos x + i\,\text{sen}\,x$; $\alpha^4 = \cos 2x + i\,\text{sen}\,2x$

$\alpha^{2n} = \cos nx + i\,\text{sen}\,nx$, entonces

$$s + iT = \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n} = \alpha^2(\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}) = \alpha^2\alpha^n\frac{(\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})}$$

$$= \alpha^{n+1}(\frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}),\ \text{donde}\ \alpha^{n+1} = \cos(\frac{n+1}{2}x) + i\,\text{sen}(\frac{n+1}{2}x)$$

$$\alpha^n = \cos\frac{n}{2}x + i\,\text{sen}\,\frac{nx}{2}$$

$$\alpha^{-n} = \cos\frac{n}{2}x - i\,\text{sen}\,\frac{nx}{2},\ \text{por tanto}\ S + iT = \cos(\frac{n+1}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{n+1}{2}x)\frac{\text{sen}\,\frac{nx}{2}}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}$$

$$\therefore\ \text{sen}\,x + \text{sen}\,2x + \ldots + \text{sen}\,nx = \frac{\text{sen}(n+1)\frac{x}{2}\,\text{sen}\,\frac{nx}{2}}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}$$

(19) Calcular

a) $\ln i^{\frac{1}{2}}$

Desarrollo

Se conoce que: $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ donde

$r = \|z\| = 1$ y $\theta = \text{arctg}(z) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\ln i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln i = \frac{1}{2}(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) \Rightarrow \ln i^{\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

b) $\ln(1+i)$

Desarrollo

$$Z = 1 + i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2},\ \theta = \text{arctg}(\frac{-1}{1}) = 315^0 = \frac{7\pi}{4}$$

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi)$$

(20) Resolver la ecuación $x^{2i} - 2x^i + 2 = 0$

Desarrollo

$x^i = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$ de donde se obtiene $x^i = 1 + i \lor x^i = 1 - i$

aplicando logaritmo se tiene: $i\ln x = \ln(1+i) \lor i\ln x = \ln(1-i)$

$$i\ln x = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \lor i\ln x = \ln\sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$$

$$\ln x = \frac{\pi}{4}2k\pi - i\ln\sqrt{2} \lor \ln x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\sqrt{2}$$

$x = e^{\frac{\pi}{4} - i\ln 2} \lor x = e^{\frac{7\pi}{4} - i\ln 2}$ donde $k = 0$.

1.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Calcular z^4 siendo:

a) $z = \frac{a}{\text{sen}\,\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha}$, $a \in R$, $0 \le \alpha \le 2\pi$

b) $z = (-\sqrt{3} + i)^{-1}$ c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{3} - i}$

(2) Sabiendo que $n = 3k$ demostrar que: $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n = 2$

(3) Efectuar las operaciones siguientes:

a) $(-1+i)^6$ b) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})^{10}$ c) $(1 + \sqrt{3}i)^7$

d) $(2+2i)^{-4}$ e) $(1+i)^{-8}$ f) $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^4$

(4) Calcular las potencias indicadas.

a) $(2-2i)^7$ b) $(\sqrt{3} - 3i)^6$ c) $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{40}$

d) $(\frac{1-i}{1+i})^8$ e) $(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^{12}$ f) $(\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i})^6$

(5) Determinar la forma polar de:

(9) Demostrar que $(\frac{1+i\,tg\theta}{1-i\,tg\theta})^n = \frac{1+i\,tg(n\theta)}{1-i\,tg(n\theta)}$

(10) Calcular las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{1-i}$ b) $\sqrt[3]{-i}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$ d) $\sqrt[3]{-4}$

e) $\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}i}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$ g) $\sqrt[3]{2+i}$ h) $\sqrt[4]{1+i}$

(11) Calcular las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{16-16\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$ c) $\sqrt[4]{8-5\sqrt{3}i}$

d) $(16\sqrt{2} + \frac{32}{\sqrt{2}}i)^{\frac{1}{5}}$ e) $\sqrt[4]{-i}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\,sen\frac{\pi}{6})}$

(12) Demostrar que si $(\cos\alpha + i\,sen\alpha)^n = 1$ entonces $(\cos\alpha - i\,sen\alpha)^n = 1$

(13) Calcular las potencias indicadas.

a) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{40}$ b) $(\sqrt{3}+i)^6$ c) $\sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$

d) $(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})^{16}$ e) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$ f) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$

a) $z = \frac{\ldots}{1+\sqrt{3}i}$ b) $z = \frac{\ldots}{-2-2i}$ c) $z = (\sqrt{3}-i)\ldots$

(6) Usa la forma polar de un número complejo para demostrar que:

a) $(1+3i)^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$ b) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$

(7) Si $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,sen\frac{2\pi}{3}$, halla $(1+w)^n$

(8) Si $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, Hallar $w_1^n + w_2^n$, $n \in Z$

g) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ h) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^8$ i) $(1+i)^{25}$

(14) Calcular las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ b) $\sqrt[3]{-1-i}$ c) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$

(15) Simplificar la expresión: $(1+\cos\theta + i\,sen\theta)^n + (1+\cos\theta - i\,sen\theta)^n$

(16) Hallar las raíces cúbicas de $z = -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$, reduciendo a su mínima expresión.

(17) Simplificar $E = \frac{(\cos 5\theta + i\,sen 5\theta)^6(\cos 3\theta - i\,sen 3\theta)^7}{(sen\theta + i\,sen\theta)^6(\cos 2\theta - i\,sen 2\theta)^{-2}}$

(18) Hallar el valor numérico de $z = (\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^4(\frac{1+i}{1-i})^5$

(19) Demuestre que $(1+\cos\theta - i\,sen\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}(\cos\frac{n\theta}{2} - i\,sen\frac{n\theta}{2})$

(20) Hallar el valor de $E = \frac{12(\cos 16^\circ + i\,sen 16^\circ)}{[3(\cos 44^\circ + i\,sen 44^\circ)][2(\cos 62^\circ + i\,sen 62^\circ)]}$

(21) Simplificar $(1+i\,tg\theta)^n + (1-i\,tg\theta)^n$ y de ahí evaluar $(1+i\,tg\frac{\pi}{8})^8$

(22) Hallar todos los valores de las raíces de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{21i-20}$ b) $(4\sqrt{2}+i4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt{3+4i}$

(23) Si z = 1 + i, w = 1 − i, calcular $(\frac{z}{w})^n$

(24) Si $z = \frac{5+5i}{10\sqrt{2}+10i}$, calcular z^{360}

(25) Simplificar $p = \frac{(1+\cos\theta + i\,sen\theta)^n}{(1-i\cos\theta + sen\theta)^{4n}}$

(26) Expresar el siguiente número complejo en su forma polar.

$$z = 1 - i + \frac{3-4i}{1-\sqrt{3}i + \frac{(3+\sqrt{3})-(1+3\sqrt{3})i}{3-i}}$$

(27) Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$ b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$ c) $(1+5i)^{\frac{5}{6}}$ d) $(-2i)^{\frac{2}{3}}$

(28) Si $w = \frac{kz+1}{z+k}$, $k \in R$, $k \neq 1$, verificar que $\| z \| = 1 \Rightarrow \| w \| = 1$ y si $z = \cos\theta + i\,sen\,\theta$, calcular arg (w).

(29) Sabiendo que $z = \cos\theta + i\,sen\,\theta$ y que $u + iv = (z+1)(z^2+1)$ probar que: $v = u\,tg(\frac{3\theta}{2})$, $u^2+v^2 = 16\cos^2\theta.\cos^2\frac{\theta}{2}$

(30) Sea $z = x_n + iy_n = w^n$, $w = 1+\sqrt{3}i$, verificar que: $x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} = 4^{n-1}\sqrt{3}$

(31) Sea $F(n) = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n + (\frac{1-i}{\sqrt{2}})^n$ y $n \in Z^+$, verificar que: F(n + 4) = -F(n)

(32) Si $F(n) = A(24-7i)^n + B(24+7i)^n$, F(0) = 0, F(1) = 14. Calcular A, B y F(3).

(33) Resolver la ecuación para θ: (cos θ + i sen θ)(cos 2θ + i sen 2θ)...(cos nθ + i sen nθ) = 1

(34) Resolver para n entero positivo $(\frac{3+z}{1+i})^n = (3-z)^n$

(35) Hallar todas las raíces de $(1+z)^5 = (1-z)^5$

(36) Denotaremos las raíces de la ecuación $(z+1)^5 + z^5 = 0$ por z_k, k = 0, 1, 2, 3, 4. Determinar $Re(z_k)$, $Im(z_k)$, k = 0, 1, 2, 3, 4.

(37) Demostrar que si $A \in C$ / $\| A \| = 1$, entonces la ecuación $(\frac{1+ix}{1-ix})^n = A$, tiene todas las raíces reales y distintas.

(38) Calcular todas las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 + z^2 + 1 = 0$ b) $z^4 + 81 = 0$ c) $z^6 + 1 = -\sqrt{3}i$

d) $z^4 = -1+\sqrt{3}i$ e) $(z-2i)^3 = -1+i$ f) $e^z = 1+i$

(39) Resolver la ecuación $z^8 - 1 = 0$, z ∈C, y representar sus raíces en el círculo respectivo.

(40) Hallar la solución de la ecuación: $z^2 = -2\sqrt{3}+2i$

(41) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + 9 = 0$ b) $z^2 - 2z + 2 = 0$ c) $z^2 + 2z + 5 = 0$

d) $z^3 + 1 = 0$ e) $z^5 + 1 = 0$ f) $z^6 - 1 = 0$

(42) Si z = 1 + i, $w = 1+\sqrt{3}i$, $u = \sqrt{3} - i$, Hallar arg (zwu)

(43) Hallar todos los números complejos $z \neq 0$ tal que $z^3 = \bar{z}$, $\bar{z} = z^{11}$

(44) Resolver la ecuación $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$

(45) Sea z = x + iy, tal que $z^{38} = 1$, $z \neq 1$. Hallar $Re(z + z^2 + ... + z^{37})$

(46) Si z = cos θ + i sen θ, $z^n = 1$, $z \neq 1$ y $M = 1 + 2z + 3z^2 + ... + nz^{n-1}$, hallar Re(M) y Im(M)

(53) Si z = x + iy, hallar la ecuación del lugar geométrico definido por $\arg(z+2) = \frac{\pi}{6}$

(54) Si b, c, w y A son números reales y z = x + iy es una solución $z'' + bz' + cz = Ae^{iwt}$, pruebe que x = Re(z) es una solución de $x'' + bx' + cx = A\cos wt$ y y = Im(z) es una solución de $y'' + by' + cy = A\,sen\,wt$

(55) Si p, m ∈ R, verificar que: $w^{2mi\,arcctg\,p}(\frac{pi+1}{pi-1})^m = 1$

(56) Probar que $r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} = r_3e^{i\theta}$, donde $r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$ y $\theta = arctg(\frac{r_1 sen\theta_1 + r_2 sen\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2})$

(57) Demostrar que:

a) $e^{2\pi i} = 1$ b) $e^{i\pi} = -1$ c) $e^{2+3\pi i} = -e^2$

(47) Si $z=\sqrt{2}(\cos a+i\,sen\,a)(\cosh b+i\,senh\,b)$, donde $0<a<\frac{\pi}{2}$, $0<b<\frac{\pi}{2}$ y $a=\text{arctg}\,3$, hallar z

(48) Expresar en la forma binómica: $z=\dfrac{(\cos\theta+i\,sen\theta)(1-(\cos\theta+i\,sen\theta)^n)}{1-(\cos\theta+i\,sen\theta)}$

(49) Si $\dfrac{1}{z-ic}=\dfrac{1}{a+ib}-\dfrac{1}{a+ic}$, a,b,c ∈ R, a ≠ 0, b ≠ c. Calcular $\|z\|^2$

(50) Si z = x + iy, describir el lugar geométrico y graficar $\arg(\frac{z-1}{z-2})=\frac{\pi}{6}$

(51) Si z = x + iy, hallar las ecuaciones del lugar geométrico definido por:

a) $\arg(\frac{z+2}{z})=\frac{\pi}{4}$ b) $\arg(\frac{z-1}{z-2})=\frac{\pi}{2}$

(52) Demostrar que: $\arg(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2})=\frac{\pi}{2}$, entonces $\|z_1\|=\|z_2\|$

d) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ e) $e^{z+\pi i}=-e^{z}$ f) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$

(58) Si $z=re^{i\theta}$. Demostrar que: $\bar{z}=re^{-i\theta}$

(59) Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma x + iy

a) $3e^{\frac{\pi}{3}i}.2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ b) $5e^{\frac{2\pi}{3}i}.4e^{\frac{7\pi}{6}i}$ c) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}.3e^{\frac{\pi}{2}i}$

d) $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ e) $\dfrac{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}{3e^{\frac{\pi}{2}i}}$ f) $\dfrac{7e^{i\theta}}{3e^{i\theta}}$

(60) Demostrar que z = a + bi es una solución de la ecuación

$z^3-4(a+b)z^2+5(a^2-b^2+2abi)z-2(a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3))=0$

(61) Usar la progresión $1+z+z^2+z^3+...+z^n$, para probar que

$$sen\,x+sen\,2x+sen\,3x+...+sen\,nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2sen\frac{x}{2}}$$

(62) Para n = 2, 3, 4, ... probar que: $sen(\frac{\pi}{n})sen(\frac{2\pi}{n})...sen(\frac{(n-1)\pi}{n})=\frac{n}{2^{n-1}}$

(63) Hallar una fórmula reducida para:

a) 1 + cos x + cos 2x + ... + cos (n – 1)x b) sen x + sen 2x + ... + sen (n – 1)x

c) cos x + cos 3x + ... + cos (2n – 1)x d) sen x + sen 3x + ... + sen (2n – 1)x

(64) Hallar la suma: $sen^2x+sen^2 3x+...+sen^2(2n-1)x$

(65) Hallar las siguientes sumas

a) $\cos^3x+\cos^3 2x+...+\cos^3 nx$ b) $sen^2x+sen^2 2x+...+sen^2 nx$

(66) Hallar las siguientes sumas

a) cos x + 2 cos 2x + 3 cos 3x + ... + n cos nx

b) sen x + 2 sen 2x + 3 sen 3x + ... + n sen nx

(67) Sean $z_1,z_2,...,z_{n-1}$, las raíces de la ecuación $z^n-1=0$, n > 1, calcular $z_0+z_1+z_2+...+z_{n-1}$, y demostrar que:

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cos\frac{8\pi}{n}+...+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1$$

$$sen\frac{2\pi}{n}+sen\frac{4\pi}{n}+sen\frac{6\pi}{n}+sen\frac{8\pi}{n}+...+sen\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$$

(68) Demostrar que: $1+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 3\theta+...=\frac{4-2\cos\theta}{5-4\cos\theta}$

(69) Si $z=6e^{\frac{\pi}{3}i}$, hallar el valor de $\|e^{iz}\|$

(70) Demostrar que: $e^z=1 \Leftrightarrow z=2k\pi i$, k ∈ Z

(71) Hallar a) $\text{Re}(e^{e^z})$ b) $\text{Im}(e^{iz^2})$

(72) Hallar z, tal que $\|e^{iz}\|<1$

(73) Aplicando la fórmula de Moivre expresar las potencias de sen θ y cos θ las siguientes funciones de ángulos múltiples.

a) sen 4θ b) cos 4θ c) sen 5θ d) cos 5θ e) sen 6θ f) cos 6θ

(74) Si $e^{iz}=\cos z+i\,sen\,z$, Demuéstrese que:

a) $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ b) $sen\,z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

(75) Verificar que:

a) senh (iz) = i sen z b) cosh (iz) = cos z c) sen (iz) = i senh z

d) cos (iz) = cosh z e) i tgh z = tg (iz) f) ctg (iz) = –i ctgh z

(76) Demuéstrese que:

a) $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ b) $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

(77) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^{2z-1}=1$ b) $e^z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ c) $i^z=e^{\ln z+i}$

d) $\ln z=2+\frac{\pi}{2}i$ e) cos z = 1 – i f) $sen\,z=2+\frac{i}{4}$

(78) Dado $z=-\|-1+2i\|+\sqrt{2}i$, hallar $\ln(\bar{z})$

(79) Determinar los valores principales de las expresiones siguientes:

a) $z=\sqrt{2}-i$ b) $z=(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ c) $z=(3i)^{2i}$

(80) Calcular: a) $[\frac{1}{2}e^{-1-3i}]^{1+i}$ b) $(1-i)^{3i}$

c) $(1+i)^{-i}$ d) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{-i}$

(81) Calcular: a) ln (-i) b) $\ln i^3$

(88) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^{2i}-2x^i+2=0$ b) $x^{2\sqrt{3}i}-x^{\sqrt{3}i}+1=0$

(89) Sea $z=x+iy=re^{i\theta}$. Demostrar que:

a) $r^n\cos n\theta=x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{4}x^{n-4}y^4+...$

b) $r^n sen\,n\theta=\binom{n}{1}x^{n-1}y-\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+...$

c) $\ln(1+i)$ d) $\ln(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

(82) Si $\cos z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$, $sen\, z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Demostrar que:

a) cos z = cos x cosh y – i sen x senh y b) sen z = sen x cosh y + i cos x senh y

(83) Demostrar que: $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

(84) Si $z_1, z_2 \in C$. Probar que: $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(85) Determinar todas las raíces de las siguientes ecuaciones.

a) cos z = 2 b) sen z = cosh 4 c) $\cosh z = \frac{1}{2}$

d) senh z = i e) cosh z = -2

(86) Determinar los valores principales de las expresiones siguientes:

a) $w = (\sqrt{2}-i)^{1-i}$ b) $w = (3i)^{2i}$ c) $w = (1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{i}}$

(87) Obtener el valor principal de z en los siguientes casos:

a) $(1-i)^z = 1$ b) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^z = i$

(90) Demostrar que: $(\frac{1+sen\theta+i\cos\theta}{1+sen\theta-i\cos\theta})^n = e^{n(\theta-\frac{\pi}{2})i}$

CAPÍTULO II

2. FUNCIONES ANALITICAS COMPLEJAS O FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA.-

Diversos problemas de Ingeniería pueden solucionarse mediante el método del análisis complejo, estos problemas pueden subdividirse en dos grandes clases:

La primera clase consiste de "problemas elementales" y para esto se requiere del conocimiento de los números complejos en el álgebra y el cálculo elemental por ejemplo se tiene muchas aplicaciones relacionados con los circuitos eléctricos y los sistemas mecánicos vibratorios, estos son los problemas de esta primera clase.

Para la segunda clase de problemas se necesita de un conocimiento detallado de las funciones analíticas complejas, los problemas abordados en ésta segunda clase es en la teoría del calor, en dinámica de los fluidos y en electrostática.

La importancia de las funciones analíticas en las matemáticas de Ingeniería está en las tres raíces principales.

1° Las partes real e imaginaria de una función analítica son soluciones de la ecuación de Laplace en dos variables independientes, también los problemas bidimensionales de potencial pueden desarrollarse mediante métodos desarrollados en relación con las funciones analíticas

2° Las integrales complicadas, reales y complejas que aparecen en las aplicaciones pueden resolverse por métodos de integración compleja.

3° Las funciones no elementales que aparecen en las matemáticas de Ingeniería son funciones analíticas que requieren de un conocimiento mucho más profundo y más detallado de sus propiedades.

2.1. TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea $z \in C$, entonces $z = x + iy$, si x e y son variables reales entonces "z" es una variable compleja.

b) **DEFINICIÓN.-** Sean $C \neq \phi$, $\| . \| : C \times C \longrightarrow R_0^+$, tal que:

i) $\| z-w \| \geq 0$, $\forall z, w \in C$ y $\| z-w \| = 0 \Leftrightarrow z = w$

ii) $\| z-w \| = \| w-z \|$, $\forall z, w \in C$ (propiedad simétrica)

iii) $\| z-w \| \leq \| z-u \| + \| u-w \|$, $\forall z, u, w \in C$ (propiedad desigualdad triangular)

Entonces el par (C, ‖ ‖) se llama "espacio métrico con la métrica ‖ ‖".

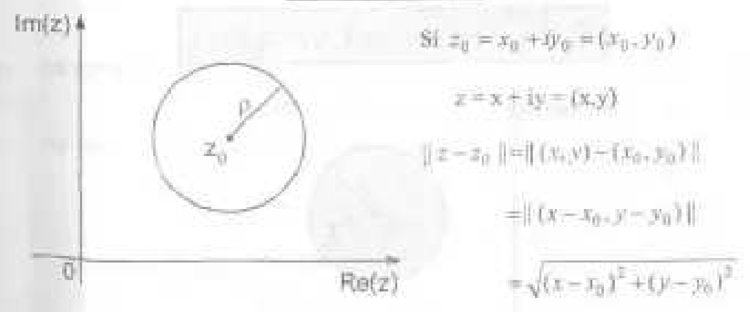
Si falla una de estas condiciones, (C, ‖ ‖) no es espacio métrico.

c) **DEFINICIÓN.-** Un círculo de centro $z_0 \in C$ y de radio $\rho > 0$, es el conjunto denotado y definido por:

$$C(z_0, \rho) = \{z \in C / \| z - z_0 \| = \rho\}$$

también se expresa en la forma:

$$C : \| z - z_0 \| = \rho$$



Si $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$

$z = x + iy = (x, y)$

$\| z - z_0 \| = \| (x, y) - (x_0, y_0) \|$

$= \| (x - x_0, y - y_0) \|$

$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

$C(z_0, \rho) = \{z \in C / \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \rho\}$, o también

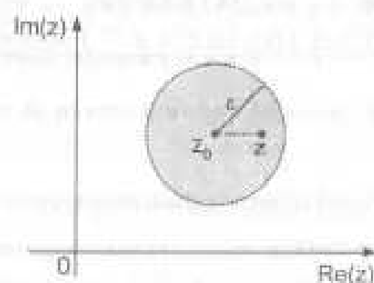
$$C(z_0, \rho) = \{z \in C / (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2\}$$

d) **DEFINICIÓN.-** Si $\varepsilon > 0$, y z_0 es un número complejo, llamaremos disco circular abierto (bola abierta) de centro z_0 y radio $\varepsilon > 0$, al conjunto denotado y definido por:

$$V_\rho(z_0) = V'(z_0, \rho) = \{z \in C / 0 < \| z - z_0 \| < \rho\}$$

Im(z)

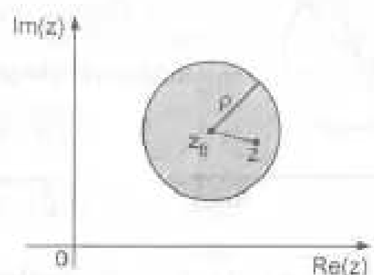
$$V_\varepsilon(z_0) = V(z_0, \varepsilon) = \{z \in C / \| z - z_0 \| < \varepsilon\}$$



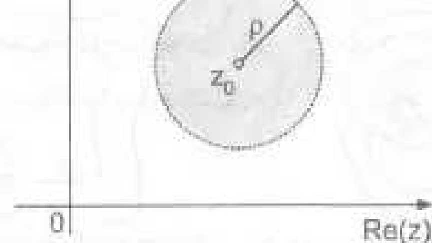
OBSERVACIÓN.- A todo disco circular abierto (bola abierta) se le llama vecindad de z_0 y de radio $\varepsilon > 0$

e) **DEFINICIÓN.-** Si $\rho > 0$, y z_0 es un número complejo, llamaremos disco circular cerrado (bola cerrada) de centro z_0 y de radio $\rho > 0$, al conjunto denotado y definido por:

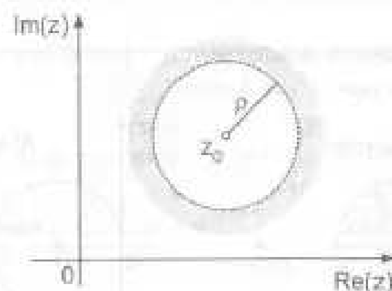
$$\overline{V}_\rho(z_0) = \overline{V}(z_0, \rho) = \{z \in C / \| z - z_0 \| \le \rho\}$$



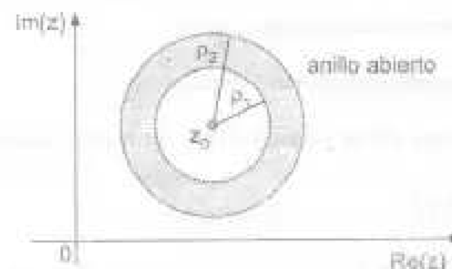
f) **DEFINICIÓN.-** Si $\rho > 0$, y z_0 es un número complejo, llamaremos disco perforado (bola reducida) de centro z_0 y de radio $\rho > 0$, al conjunto denotado y definido por:



g) **DEFINICIÓN.-** Si $\rho > 0$, y z_0 es un número complejo, el conjunto definido por $\{z \in C / \| z - z_0 \| > \rho\}$ representa el exterior del círculo $C(z_0, \rho)$

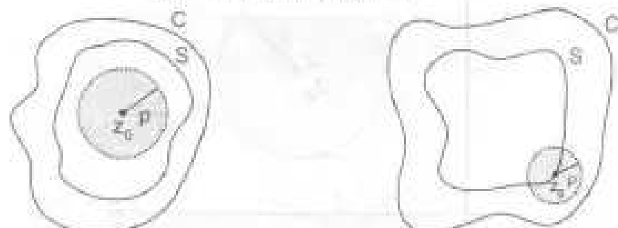


h) **DEFINICIÓN.-** Si $\rho_1, \rho_2 > 0$, con $\rho_1 < \rho_2$ y z_0 es un número complejo, el conjunto definido por: $\{z \in C / \rho_1 < \| z - z_0 \| < \rho_2\}$ representa la región entre dos círculos concéntricos de radios ρ_1 y ρ_2 respectivamente.



2.2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.-

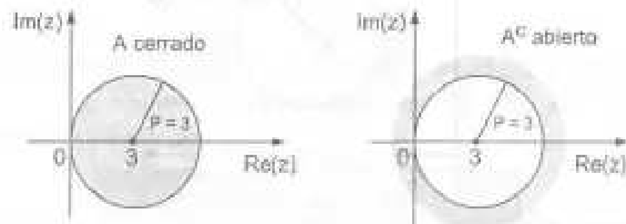
a) **DEFINICIÓN.-** Un conjunto $S \subset C$, $S \ne \phi$ es abierto si y sólo si $\forall z_0 \in S$, $\exists \rho > 0$ tal que $V_\rho(z_0) \subset S$.



S es abierto, puesto que $V_\rho(z_0) \subset S$ S no es abierto, puesto que $V_\rho(z_0) \not\subset S$

b) **DEFINICIÓN.-** Un conjuntos $S \subset C$, $S \ne \phi$ es cerrado sí y sólo si su complemento es abierto ($C_S = S^C$ = complemento de S).

Ejemplo.- El conjunto A definido por: $A = \{z \in C / \| z - 3 \| \le 3\}$ es un conjunto cerrado, pues A^C es abierto.



$A^C = \{z \in C / \| z - 3 \| > 3\}$ es abierto

OBSERVACIÓN.-

① Todo disco abierto es un conjunto abierto.

② Todo disco cerrado es un conjunto cerrado.

③ El único conjunto abierto y cerrado a la vez es el conjunto vació ϕ.

④ $V_\rho(z_0) \subset \overline{V}_\rho(z_0)$

⑤ $V'_\rho(z_0) = V_\rho(z_0) - \{z_0\}$

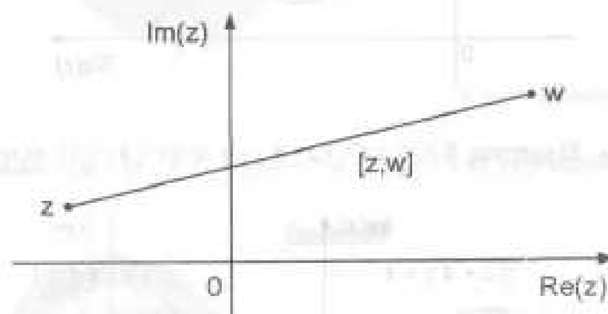
2.3. CONJUNTO CONEXO.-

A un segmento de recta de extremos $z, w \in C$, denotaremos y definimos por:

$$[z,w] = \{(1-t)z + tw / 0 \le t \le 1\}$$

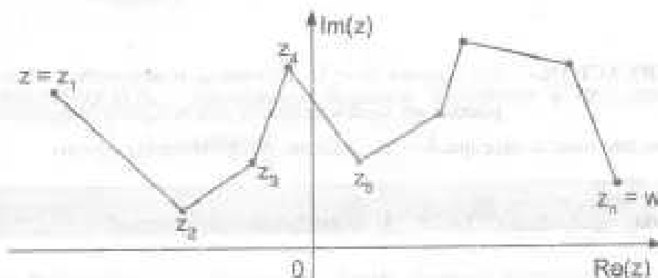
donde para $t = 0$ se tiene el extremo inicial z

$t = 1$ se tiene el extremo final w



Una poligonal en C es un conjunto de la forma:

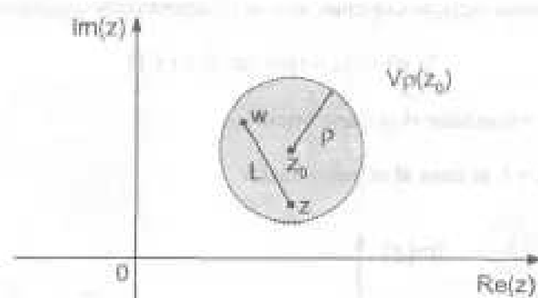
$$\bigcup_{j=1}^{n} [z_j, z_{j+1}] \text{, donde } z = z_1, \dots, z_n = w$$



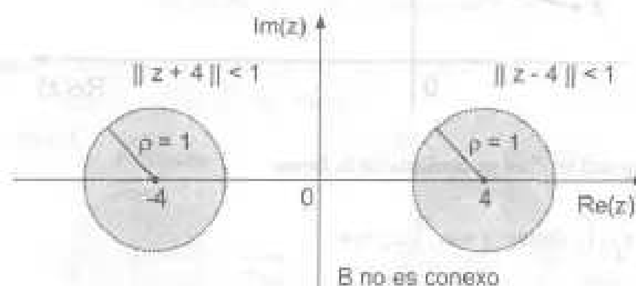
a) **DEFINICIÓN.-** Un conjunto $S \subset C$, $S \ne \phi$ es conexo si dos puntos $z, w \in S$ pueden ser unidos mediante una poligonal íntegramente contenido en S.

Intituivamente significa que S está constituido por una sola pieza.

Ejemplo.- El conjunto $V_\rho(z_0) = \{z \in C / \| z - z_0 \| < \rho\}$ es un conjunto conexo.



Ejemplo.- El conjunto $B = \{z \in C / \| z - 4 \| < 1 \vee \| z + 4 \| < 1\}$ es no conexo?



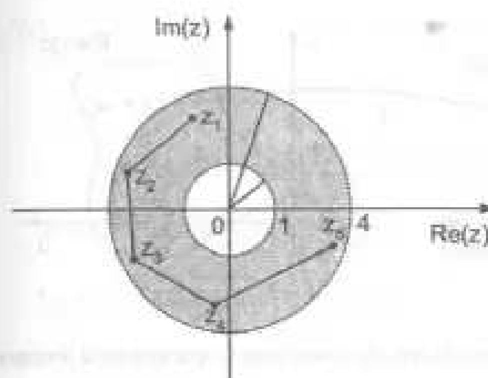
OBSERVACIÓN.- Un conjunto $S \subset C$ es conexo si dos puntos arbitrario $z, w \in S$ pueden ser unidos mediante una poligonal íntegramente contenida en S, en este caso se dice que S es un conjunto poligonalmente conexo.

Ejemplo.- ¿ $A = \{z \in C / 1 < z\bar{z} < 4\}$ es poligonalmente conexo?

Desarrollo

Sea $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

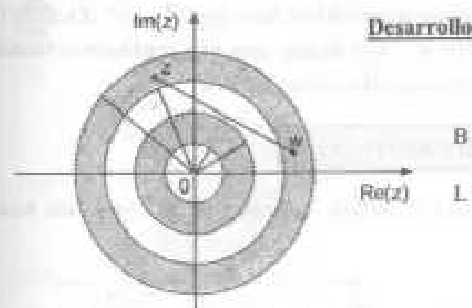
$A = \{(x, y) \in R^2 / 1 < x^2 + y^2 < 4\}$



A es poligonalmente conexo

Ejemplo.- ¿$B = \{z \in C / 1 \le \| z \| < 2 \vee 3 \le \| z \| < 4\}$ es poligonalmente conexo?

Desarrollo



B no es poligonalmente conexo, puesto que:

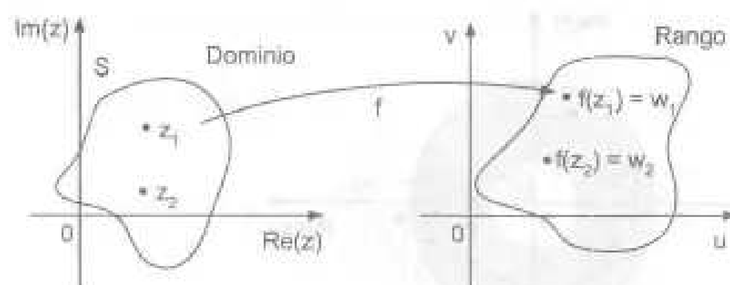
$L = \{(1-t)z + tw / 0 \le t \le 1\} \not\subset B$

OBSERVACIÓN.- Llamaremos dominios ó regiones a los conjuntos abiertos y conexos.

2.4. FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA.-

a) Definición.- Una función de variable compleja y de valor complejo es una regla que asigna un número complejo w a cada número complejo z del conjunto S, es decir: $f: S \subset C \longrightarrow C$

$z \longrightarrow f(z) = w$



Si w = f(z), w es el valor de la función f en el punto z que está en el dominio S.

A la función w = f(z) expresaremos en términos de la descomposición en parte real e imaginaria, es decir.

Si z = x + iy y w = u + iv entonces w = f(z) = f(x + iy) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y), por lo tanto la función compleja w = f(z) de una variable compleja está formada de un par de funciones reales de dos variables reales, es decir:

w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)

donde u(x,y) = Re(f(z)), v(x,y) = Im(f(z)), además $u, v: R^2 \to R$ son funciones reales de dos variables.

Ejemplo.- Expresar $w = f(z) = z^2$ como un par de funciones reales de dos variables reales.

Desarrollo

$w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, de donde

$u(x, y) = x^2 - y^2$ y v(x,y) = 2xy

Ejemplo.- Si $f: C \to C / f(z) = z^2 - z\bar{z}^2 + zi$. Determinar Re(f(z)) y Im(f(z))

$f(z) = z^2 - z\bar{z}^2 + zi = (x+iy)^2 - (x+iy)(x-iy)^2 + (x+iy)i$

$= x^2 - y^2 + 2xyi - (x^2 + y^2)(x - iy) + xi - y$

$= (x^2 - y^2 - x^3 - xy^2 - y) + (x + 2xy + x^2 y + y^3)i$

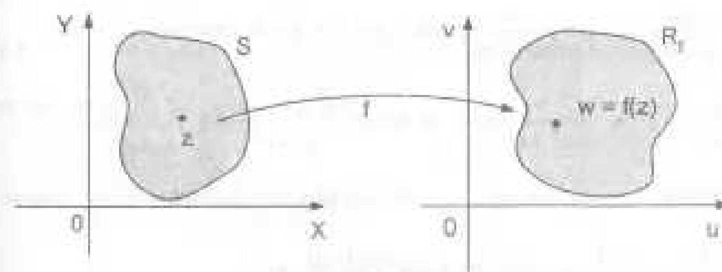
$\therefore \quad Re(f(z)) = u(x, y) = x^2 - y^2 - x^3 - xy^2 - y$

$Im(f(z)) = v(x, y) = x + 2xy + x^2 y + y^3$

OBSERVACIÓN.-

① Al conjunto de los números complejos que puede tomar la función w = f(z) conforme "z" varia en la región S, se llama Rango de Valores de la función w = f(z).

② Si $\forall z \in S$ le corresponde solamente un valor w = f(z), entonces la función se llama "UNÍVOCA" (uno a uno).



En caso contrario se llama "multiforme"

Ejemplo.- $f: C \longrightarrow C / f(z) = \ln(z) = \ln \| z \| + i(\theta + 2k\pi)$, $\forall z \in z$, $\theta = \arg(z)$

③ La función w = f(z) realiza una transformación de los puntos del plano complejo (z) en los puntos correspondiente al plano complejo (w).

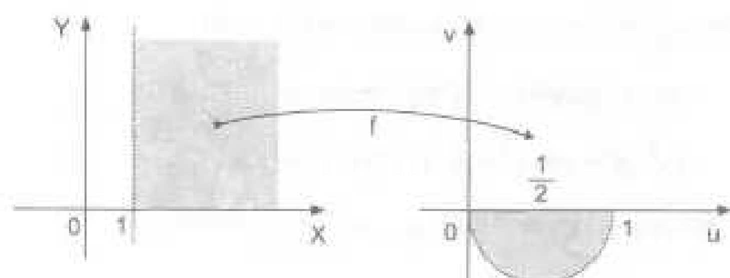
Ejemplo.- Si $f : C \to C / f(z) = z^{...} - 2z^{...} + 2i$. Determinar Re(f(z)) y Im(f(z))

Desarrollo

Sea $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$, por lo tanto

Ejemplo.- Hallar la imagen bajo la transformación (ó función) $w = f(z) = \frac{1}{z}$ del cuadrante $x > 1$, $y > 0$.

Desarrollo



Sea $f : C \to C / w = f(z) = \frac{1}{z}$, donde $z = x + iy$, $w = u + iv$

Como $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$

Por lo tanto $z = x + iy = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$, de donde

$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \;\wedge\; y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$, como $x > 1 \wedge y > 0$, entonces

$\frac{u}{u^2 + v^2} > 1 \;\wedge\; \frac{-v}{u^2 + v^2} > 0$, de donde $\frac{u^2 + v^2 - u}{u^2 + v^2} < 0 \;\wedge\; v < 0$

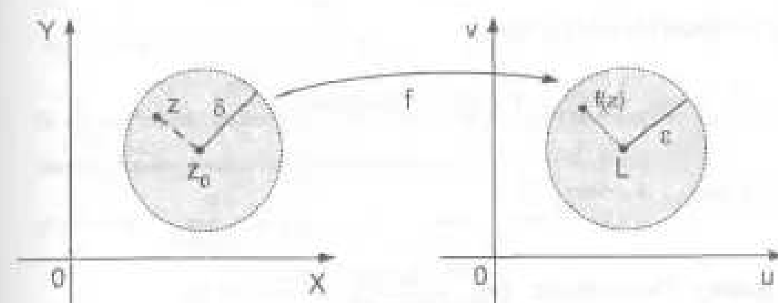
por lo tanto $u^2 + v^2 - u < 0 \;\wedge\; v < 0$, completando cuadrado

$(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{4} \;\wedge\; v < 0$ de donde $C(\frac{1}{2}, 0)$, $R = \frac{1}{2}$

2.5. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPLEJA DE VARIABLE COMPLEJA.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea $f: D \subset C \longrightarrow C$, una función compleja de variable compleja z, definida en la región $D \subset C$ excepto posiblemente en z_0, entonces diremos que el límite de f(z) es el número complejo L cuando z se aproxima a z_0 ($\lim_{z \to z_0} f(z) = L$), si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \| z - z_0 \| < \delta$, entonces $\| f(z) - L \| < \varepsilon$. Es decir:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 / 0 < \| z - z_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(z) - L \| < \varepsilon$$



Ejemplo.- Demostrar que: $\lim_{z \to i} z + i = 2i$

Desarrollo

$\lim_{z \to i} z + i = 2i \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > ? / 0 < \| z - i \| < \delta \Rightarrow \| (z + i) - 2i \| < \varepsilon$

$\| (z + i) - 2i \| = \| z - i \| < \varepsilon = \delta$, por lo tanto es suficiente tomar $\delta = \varepsilon$

para que $\lim_{z \to i} z + i = 2i$

Ejemplo.- Pruebe que: $\lim_{z \to 3} \frac{z - 1}{z - 2} = 2$

Desarrollo

$\lim_{z \to 3} \frac{z - 1}{z - 2} = 2 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > ? / 0 < \| z - 3 \| < \delta \Rightarrow \| \frac{z - 1}{z - 2} - 2 \| < \varepsilon$

$\| \frac{z - 1}{z - 2} - 2 \| = \| \frac{z - 3}{z - 2} \| = \| \frac{1}{z - 2} \| . \| z - 3 \|$ ... (1)

Sea $\| z - 3 \| < \delta_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < z - 3 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < z - 2 < \frac{3}{2}$, invirtiendo

$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{z - 2} < 2 \Rightarrow \| \frac{1}{z - 2} \| < 2$ ... (2)

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$\| \frac{z - 1}{z - 2} - 2 \| = \| \frac{1}{z - 2} \| . \| z - 3 \| < 2\delta_2 = \varepsilon$ de donde $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$

por lo tanto $\exists\, \delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$

Ejemplo.- Demostrar que: $\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$

Desarrollo

$\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > ?$ tal que si

$0 < \| z - i \| < \delta \Rightarrow \| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} - (4 + 4i) \| < \varepsilon$

$\| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} - (4 + 4i) \| = \| 3z^3 + (3i - 2)z^2 + (5 - 2i)z + i - 4 \|$

$= \| [3z^2 + (6i - 2)z - 1 - 4i](z - i) \|$

2.6. TEOREMA.-

Sea $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0 = u_0(x_0, y_0) + iv_0(x_0, y_0)$.

Si w está definida en una región $D \subset C$, con la posible excepción de z_0, y $u, v: R^2 \to R$ son funciones de valor real, demuestre que el límite de w existe en z_0 y $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ si y solo si $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = u_0$ y $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = v_0$

Demostración

i) Demostraremos la condición suficiente.

Supongamos que $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = u_0$ y $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = v_0$ entonces $\forall\, \varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que:

$| u(x,y) - u_0 | < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, (x,y)$ tal que $z = x + iy \in V'_\delta(z_0) \cap D$

$| u(x,y) - u_0 | < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, (x,y)$ tal que $z = x + iy \in V'_\delta(z_0) \cap D$

Si $\exists\, \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces las dos desigualdades anteriores se verifican $\forall\, (x,y)$

$= \| [3(z-i+i)^2 + (6i-2)(z-i+i) - 1 - 4i](z-i) \|$

$= \| 3(z-i)^2 + (12i-2)(z-i) - 10 - 6i \| \| z-i \|$

$\le [3\| z-i \|^2 + \| 12i-2 \| \| z-i \| + \| -10+6i \|] \| z-i \|$

$< (3+13+12)\delta_2 = \varepsilon \Rightarrow \delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{28}$

por lo tanto $\exists\, \delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{28}\}$

tal que $z \in V_\delta(z_0) \cap D$

Ahora utilizando la desigualdad triangular

$\| f(z) - w_0 \| = \| (u(x,y)-u_0) + (v(x,y)-v_0)i \|$

$\sqrt{[u(x,y)-u_0]^2 + [v(x,y)-v_0]^2}$

$\le \sqrt{(u(x,y)-u_0)^2} + \sqrt{(v(x,y)-v_0)^2}$

$= | u(x,y)-u_0 | + | v(x,y)-v_0 | < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\| f(z) - w_0 \| < \varepsilon$, $\forall\, z \in V_\delta'(z_0) \cap D$, por lo tanto existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

ii) Demostraremos la condición necesaria.

Supongamos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ entonces $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$\| f(z) - w_0 \| < \varepsilon$, $\forall\, z \in V_\delta'(z_0) \cap D$ puesto que:

$| u(x,y) - u_0 | = | \mathrm{Re}(f(z) - w_0) | \le \| f(z) - w_0 \| < \varepsilon$ y

$| v(x,y) - v_0 | = | \mathrm{Im}(f(z) - w_0) | \le \| f(z) - w_0 \| < \varepsilon$

Luego se tiene:

$| u(x,y) - u_0 | < \varepsilon$, $\forall$ (x,y) tal que $z = x + iy \in V_\delta'(z_0) \cap D$

$| v(x,y) - v_0 | < \varepsilon$, $\forall$ (x,y) tal que $z = x + iy \in V_\delta'(z_0) \cap D$

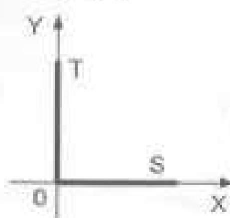
es decir que existe $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ y $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

Ejemplo.- Calcular $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ si existe donde $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$

Desarrollo

$f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{\bar{z}^2}{z\bar{z}} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, donde

$u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, y $v(x,y) = \dfrac{-2xy}{x^2 + y^2}$



T: x = 0

S: y = 0

$\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[S]{} (0,0)} u(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[T]{} (0,0)} u(x,y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^2}{-y^2} = -1$

como $\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[S]{} (0,0)} u(x,y) \ne \lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[T]{} (0,0)} u(x,y) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} u(x,y)$

por lo tanto $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$, $\nexists$

2.7. TEOREMA.-

Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ existe, demuestre que para cada $\varepsilon > 0$, existe un número positivos $\delta > 0$ tal que para dos puntos cualquiera $z_1, z_2 \in V_\rho'(z_0)$, entonces $\| f(z_2) - f(z_1) \| < \varepsilon$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ un número pequeño cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que $\| f(z_2) - w_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\| f(z_1) - w_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$ donde $z_1, z_2 \in V_\rho'(z_0)$

Ahora aplicamos la desigualdad triangular

$\| f(z_2) - f(z_1) \| = \| (f(z_2) - w_0 + (w_0 - f(z_1)) \|$

$\le \| f(z_2) - w_0 \| + \| f(z_1) - w_0 \| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore \| f(z_2) - f(z_1) \| < \varepsilon$, $\forall\, z_1, z_2 \in V_\rho'(z_0)$

OBSERVACIÓN.- El teorema anterior indica que una función no tiene límite cuando z tiende a un punto z_0, o sea que para algún $M > 0$ puede existir en cada $V_\delta'(z_0)$ puntos z_1, z_2 tales que $\| f(z_1) - f(z_2) \| > M$, $\forall\, \delta > 0$

a) **DEFINICIÓN.-** Si una función no es acotada en ninguna vecindad reducida de z_0, entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ no existe. Si además f está definida en alguna vecindad reducida de z_0, decimos que f diverge a infinito cuando $z \to z_0$

Ejemplo.- La función $f(z) = \dfrac{az}{z - z_0}$, $a \ne 0$, $z_0 \ne 0$ está definida para todo complejo, excepto para $z = z_0$, demuestre que f(z) diverge a infinito cuando z tiende a z_0

Desarrollo

$\forall\, M > 0$, $\| f(z) \| > M$, si $\left\| \dfrac{az}{z - z_0} \right\| > M$

Si $\| z - z_0 \| \le 1 \Rightarrow \| z \| \le \| z_0 \| + 1$, y por lo tanto

$\left\| \dfrac{az}{z - z_0} \right\| > M$ Si $\| z - z_0 \| < \dfrac{| a | (\| z_0 \| + 1)}{M}$

② $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) - \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = A - B$

③ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z).g(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z). \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = A.B$

④ Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \ne 0$, probar que existe $\delta > 0$, tal que $\| f(z) \| > \frac{1}{2} \| A \|$ para $0 < \| z - z_0 \| < \delta$

⑤ Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \ne 0$, entonces $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{1}{A}$

⑥ $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}$, $B \ne 0$, $g(z) \ne 0$, $\forall\, z$

⑦ Si $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, una función polinómica en z, entonces:

$\lim f(z) = \lim (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)$

sea $\delta=\min\{1,\frac{|a|(\|z_0\|+1)}{M}\}$ entonces $\|f(z)\|>M$

$\forall z\in V'_\delta(z_0)$ por lo tanto f(z) diverge a infinito cuando z tiende a z_0.

Ejemplo.- La función $f(z)=\frac{z+2}{z^2+(2-i)z-(3+3i)}$, diverge a infinito cuando z tiende a -3 puesto que $\lim\limits_{z\to-3} z+2=-1$

$$\lim_{z\to-3} z^2+(2-i)z-(3+3i)=0$$

2.8. PROPIEDADES DE LÍMITES DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

Supongamos que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, entonces:

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)+g(z))=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)+\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=A+B$

$$=a_n z_0^n+a_{n-1}z_0^{n-1}+\dots+a_1 z_0+a_0$$

(8) Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L_1$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=L_2$ entonces $L_1=L_2$. (propiedad de unicidad)

(9) Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ y $\lim\limits_{z\to A} g(z)$ existen, si $\exists V'_\rho(z_0)$ tal que $f(z)\neq z_0$, $\forall z\in V'_\rho(z_0)$ entonces $\lim\limits_{z\to z_0} g(f(z))=\lim\limits_{z\to A} g(z)$

Demostración

(1) Como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0/0<\|z-z_0\|<\delta_1 \Rightarrow \|f(z)-A\|<\frac{\varepsilon}{2}$

además $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0/0<\|z-z_0\|<\delta_2 \Rightarrow \|f(z)-A\|<\frac{\varepsilon}{2}$

Sea $0<\|z-z_0\|<\delta$, donde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces por la desigualdad triangular se tiene:

$$\|(f(z)+g(z))-(A+B)\|=\|(f(z)-A)+(g(z)-B)\|$$

$$\leq\|f(z)-A\|+\|g(z)-B\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

como $\|(f(z)+g(z))-(A+B)\|<\varepsilon$, siempre que $0<\|z-z_0\|<\delta$ entonces $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)+g(z))=A+B$

(2) En forma similar que (1) se deja como ejercicio.

(3) $f(z).g(z)-AB=f(z).g(z)-B\,f(z)+B\,f(z)-AB$

$$=f(z).(g(z)-B)+B(f(z)-A)$$

$$\|f(z).g(z)-AB\|\leq\|f(z)\|\,\|g(z)-B\|+\|B\|.\|f(z)-A\|$$

$$\leq\|f(z)\|.\|g(z)-B\|+(\|B\|+1)\|f(z)-A\| \quad \dots(1)$$

como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, entonces se puede encontrar $\delta_1>0$ tal que $\|f(z)-A\|<1$

para $0<\|z-z_0\|<\delta_1$, por propiedad de la desigualdad se tiene:

$$\|f(z)-A\|\geq\|f(z)\|-\|A\| \Rightarrow \|f(z)\|-\|A\|<1 \Rightarrow \|f(z)\|<1+\|A\|$$

osea que $\|f(z)\|<p$, donde p es una constante positiva.

además $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$ entonces $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0$ tal que $\|g(z)-B\|<\frac{\varepsilon}{2p}$ para $0<\|z-z_0\|<\delta_2$

También $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_3>0$, tal que:

$$\|f(z)-A\|<\frac{\varepsilon}{2(\|B\|+1)},\ \text{para } 0<\|z-z_0\|<\delta_3$$

Utilizando estos resultados en (1) se tiene:

$$\|f(z).g(z)-AB\|\leq\|f(z)\|.\|g(z)-B\|+(\|B\|+1)\|f(z)-A\|$$

$$<p\frac{\varepsilon}{2p}+(\|B\|+1)\frac{\varepsilon}{2(\|B\|+1)}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

como $\|f(z).g(z)-AB\|<\varepsilon$, para $0<\|z-z_0\|<\delta$, donde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ por lo tanto $\lim\limits_{z\to z_0} f(z).g(z)=A.B$

(4) Como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Rightarrow \forall\varepsilon=\frac{1}{2}\|A\|>0,\ \exists\delta>0$, tal que $\|f(z)-A\|<\frac{1}{2}\|A\|$, para $0<\|z-z_0\|<\delta$

$A=A-f(z)+f(z)$, aplicando la desigualdad triangular

$$\|A\|=\|(A-f(z)+f(z)\|\leq\|f(z)-A\|+\|f(z)\|$$

$$\|A\|\leq\|f(z)-A\|+\|f(z)\|<\frac{1}{2}\|A\|+\|f(z)\|$$

$$\therefore\ \|f(z)\|>\frac{1}{2}\|A\|$$

(5) Dado $\varepsilon>0,\ \exists\delta=?$ tal que si $0<\|z-z_0\|<\delta \Rightarrow \|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{A}\|<\varepsilon$

$$\|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{A}\|=\frac{1}{\|A\|}.\frac{1}{\|f(z)\|}\|f(z)-A\| \quad \dots(1)$$

por hipótesis se tiene $\forall\varepsilon>0$, podemos encontrar $\delta_1>0$ tal que si $0<\|z-z_0\|<\delta_1$ entonces $\|f(z)-A\|<\frac{1}{2}\|A\|^2\varepsilon$

además $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $A\neq 0$, podemos encontrar $\delta_2>0$ tal que si $0<\|z-z_0\|<\delta_2 \Rightarrow \|f(z)\|>\frac{1}{2}\|A\|$, por el ejercicio (4), entonces:

Si $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ tal que si $0<\|z-z_0\|<\delta$ entonces:

$$\|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{A}\|=\frac{1}{\|A\|}.\frac{1}{\|f(z)\|}\|f(z)-A\|<\frac{1}{\|A\|}.\frac{2}{\|A\|}.\frac{\|A\|^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

Por lo tanto $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ tal que si:

$$0<\|z-z_0\|<\delta \Rightarrow \|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{A}\|<\varepsilon$$

$$\therefore\ \lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{A}$$

(6) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0} f(z).\frac{1}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0} f(z).\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{g(z)}=A.\frac{1}{B}=\frac{A}{B}$

$$\therefore\ \lim\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}$$

Ejemplo.- La función $f: D\subset C\longrightarrow D$ tal que $f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}}{z} & si\ z\neq 0\\ 0 & si\ z=0\end{cases}$ ¿f es continua en z = 0?

Desarrollo

i) f(0) = 0 está definida

ii) $\exists\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$

$$f(z)=\frac{\bar{z}}{z}=\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}i$$

NOTA.- La demostración de las demás propiedades dejamos como ejercicio.

2.9. CONTINUIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Diremos que una función $f: D \subset C \longrightarrow C$ es continua en el punto $z_0 \in D$, si y sólo si:

i) $f(z_0)$ está definida $\Leftrightarrow$ $u(x_0, y_0)$ y $v(x_0, y_0)$ estan definidas.

ii) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow$ existen $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$$

OBSERVACIÓN.-

① $f(z) = f(x + iy) = f(x,y) = u(x,y) + i\, v(xy)$

② $Re(f(z)) = u(x,y)$ y $Im(f(z)) = v(x,y)$

③ $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ es continua en $z_0 \in D \Leftrightarrow u(x,y) = Re(f(z))$ y $v(x,y) = Im(f(z))$ es continua en el punto (x_0, y_0).

④ La función $f: D \subset C \longrightarrow C$ es continua en D si f es continua en cada punto de D.

$$\exists \lim_{z\to 0} f(z) \Leftrightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ y } \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

sea S: $y = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

T; $x = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1$

Como $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} u(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} u(x,y) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$

Por lo tanto $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ no existe.

Luego $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ no es continua en $z = 0$ puesto que falla la segunda condición de continuidad.

2.10. PROPIEDADES DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

Si $f,g: D \subset C \longrightarrow C$ son continuas en D, entonces:

① $f + g$ es continua en D

② $f - g$ es continua en D

③ $f.g$ es continua en D

④ $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$ es continua en D

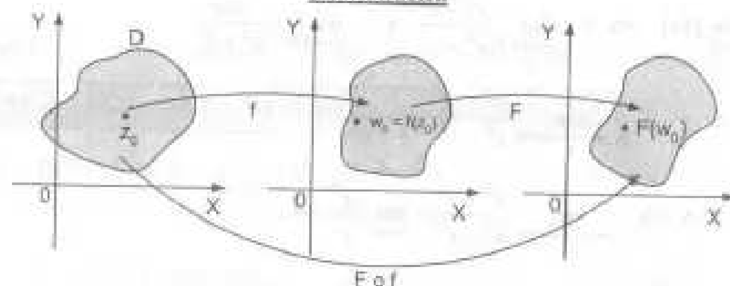
OBSERVACIÓN.- De la definición de continuidad se tiene que $f(z)$ es continua en un punto z_0 en D si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\| f(z) - f(z_0) \| < \varepsilon$, para todo z interior a D que satisface $\| z - z_0 \| < \delta$.

NOTA.- Debemos observar que δ depende ε y en general de z_0.

2.11. TEOREMA.-

Si $f(z)$ es continua sobre el valor w_0 en el punto z_0 y $F(w)$ es continua en w_0, entonces $F(f(z))$ es continua en z_0.

Demostración



Si $F(w)$ es continua en w_0, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que:

$\| F(w) - F(w_0) \| < \varepsilon \Rightarrow \| w - w_0 \| < \delta_1$ como $f(z)$ es continua en z_0, entonces $\exists \delta > 0$, tal que $\| f(z) - w_0 \| < \delta \Rightarrow \| z - z_0 \| < \delta$

Sabemos que $w = f(z)$, entonces tendremos la equivalencia:

$\| F(f(z)) - F(f(z_0)) \| < \varepsilon \Rightarrow \| z - z_0 \| < \delta$

Lo que prueba que $F(f(z))$ es continua en z_0, entonces la composición de funciones continuas es continua.

a) **DEFINICIÓN.-** Una función $f(z)$ definida sobre un dominio $D \subset C$ se dice que es "uniformemente continua en D" si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para todo z_1 y z_2 en D, entonces $\| f(z_1) - f(z_2) \| < \varepsilon$ se satisface $\| z_1 - z_2 \| < \delta$.

2.12. TEOREMA.-

Sea $f(z)$ una función continua sobre un conjunto compacto $D \subset C$ entonces $f(z)$ es uniformemente continua sobre D.

Demostración

La prueba los haremos por el absurdo

Asumimos que $f(z)$ es continua sobre un conjunto compacto D, pero que no es uniformemente continua sobre D $\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ tal que cada $\delta > 0$, existen dos puntos z y z' posesionados en D, o sea que:

$$\| z - z' \| < \delta \text{ y } \| f(z) - f(z') \| \geq \varepsilon \qquad \dots (1)$$

Sean $\delta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, nosotros tenemos la sucesión de puntos en D; $\{z_n\}$ y $\{S_n\}$ tal que

$\| z_n - S_n \| < \frac{1}{n}$ y $\| f(z_n) - f(S_n) \| \geq \varepsilon$ siendo el conjunto D limitado y cerrado.

Sabemos que la sucesión $\{z_n\}$ tiene como punto de acumulación a z_0 en D.

Si tenemos una subsucesión $\{z'_m\}$ que converge a z_0 y sea $\{s'_m\}$ una subsucesión de $\{S_n\}$, entonces $\| z_0 - s'_m \| \leq \| z_0 - z'_m \| + \| z'_m - s'_m \| \qquad \dots (2)$

Siendo $z'_m \to z_0$, nosotros tenemos $\| z_0 - z'_m \| \to 0$, además también se tiene que

$\| z'_m - s'_m \| \to 0$, por (2) se tendrá que $\| z_0 - s'_m \| \to 0$ y que $s'_m \to 0$.

Luego $\| f(z'_m) - f(s'_m) \| \leq \| f(z'_m) - f(z_0) \| + \| f(z_0) - f(s'_m) \|$

Siendo $f(z)$ continua en z_0, por el teorema anterior se tiene que (2) se aproxima a cero cuando $m \longrightarrow \infty$ lo que contradice a (1), donde se ve que $\| f(z'_m) - f(s'_m) \| \geq \varepsilon$, $\forall$ m entonces $f(z)$ es uniformemente continua sobre D.

2.13. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Clasifique los conjuntos de acuerdo a los términos: abierto, cerrado, acotado, conexo y simplemente conexo.

d) $D = \{z \in C / |Re(z)| < 1\}$

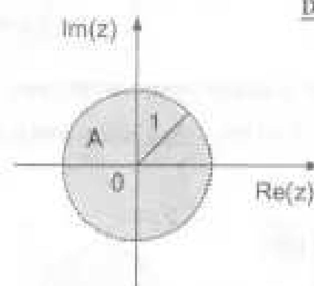
Im(z)

Desarrollo

- D es abierto

a) $A=\{z\in C/\|z\|<1\}$

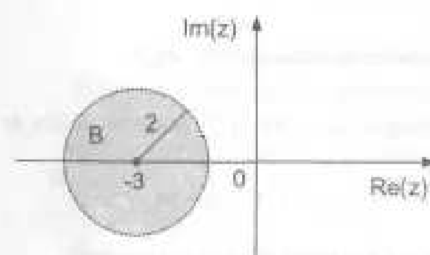
Desarrollo



- A es abierto
- A es acotado, pues $\forall z\in V_1(0)$, $\exists R>0/\|z\|<R$, siendo R = 1, es decir A esta dentro de algún circulo $\|z\|=R$
- A es conexo, puesto que es una figura de una sola pieza
- A es simplemente conexo, puesto que: $A^C=\{z\in C/\|z\|\ge 1\}$ es conexo

b) $B=\{z\in C/\|z+3\|<2\}$

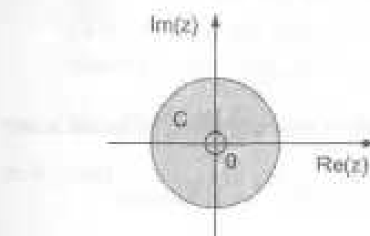
Desarrollo



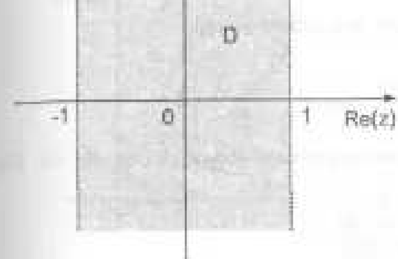
- B es un conjunto abierto
- B es acotado, pues $\forall z\in V_2(-3)$, $\exists R>0/\|z\|<R$, siendo R = 4
- B es conexo, puesto que es una figura de una sola pieza
- B es simplemente conexo, puesto que $B^C=\{z\in C/\|z+3\|\ge 2\}$ es conexo

c) $C=\{z\in C/\ 0<\|z\|<1\}$

Desarrollo



- C es abierto
- C es acotado, pues $\exists\ 1>0/\|z\|<1$
- es conexo (C es una figura de una sola pieza)
- $C^C=\{z\in C/\|z\|\ge 1\ \cup\ \{0\}\}$ no es conexo
C no es simplemente conexo



- No es acotado
- D es conexo
- $D^C=\{z\in C/|\text{Re}(z)|\ge 1\}$

$=\{z\in C/\text{Re}(z)\le -1\ \vee\ \text{Re}(z)\ge 1\}$

no es conexo entonces D no es simplemente conexo

(2) Hacer el mismo análisis del ejercicio (1), además determinar el interior, frontera, exterior y cerradura.

a) $A=\{z\in C/\|z-3\|\le 2\|z-2\|\}$

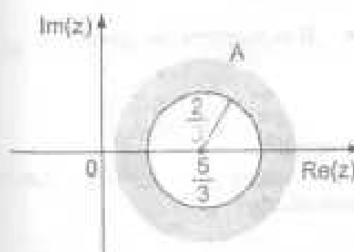
Desarrollo

Si $z\in C\ \Rightarrow\ z=x+iy\ \Rightarrow\ \begin{cases} z-3=(x-3)+iy \\ z-2=(x-2)+iy\end{cases}$

$\|z-3\|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$; $\|z-2\|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}\le 2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$, simplificando

$(x-\frac{5}{3})^2+y^2\ge\frac{4}{9}$, cuyo gráfico es:



- A es cerrado
- A no es acotado
- A es conexo
- $A^C=\{z\in C/\|z-3\|>2\|z-2\|\}$ es conexo, entonces A es simplemente conexo

- $A^0=\{z\in C/V_\varepsilon(z_0)\subset A\}$

$A^0=\{z\in C/\|z-3\|<2\|z-2\|\}$

- $F_r(A)=A-A^0$, $F_r(A)$ siempre es un conjunto cerrado

$F_r(A)=\{z\in C/\|z-3\|=2\|z-2\|\}$

- $Ext(A)=(CA)^0$, Ext(A) siempre es un conjunto abierto A cerrado $\Leftrightarrow$ Ext(A) = C(A)

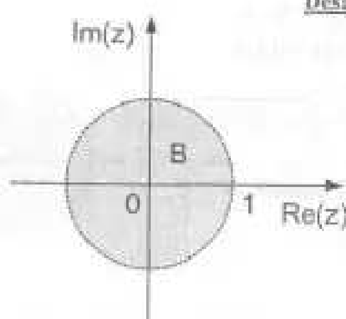
Ext(A) = $\{z\in C/\|z-3\|>2\|z-2\|\}$

- $\bar{A}=\{z\in C/V_\varepsilon(z)\cap A\ne\phi\}$; $\bar{A}=F_r\cup A^0$

$\bar{A}=\{z\in C/\|z-3\|\le 2\|z-2\|\}$

b) $B=\{z\in C/\|z\|<1\}$

Desarrollo



CA = $\{z\in C/\|z\|\ge 1\}$

$(CA)^0=\{z\in C/\|z\|>1\}$

- B es abierto
- B es acotado
- B es conexo
- B es simplemente conexo

$B^0=\{z\in C/\|z\|<1\}$

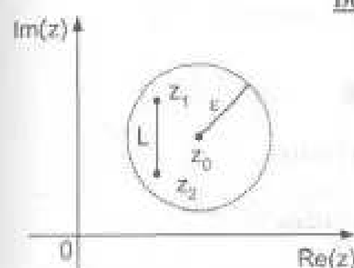
$F_r(B)=\{z\in C/\|z\|=1\}$ es un conjunto cerrado

Ext(B) = $\{z\in C/\|z\|>1\}$ es un conjunto abierto

$\bar{B}=\{z\in C/\|z\|\le 1\}$

(3) Demostrar que el disco abierto $V_\varepsilon(z_0)=\{z\in C/\|z-z_0\|<\varepsilon\}\subset C$ es poligonalmente conexo.

Desarrollo



Sea $z_1,\ z_2\in V_\varepsilon(z_0)$ y

$L=\{(1-t)z_1+tz_2\ /\ 0\le t\le 1\}$

$=\{z_1+(z_2-z_1)t\ /\ 0\le t\le 1\}$

es el polígono que une z_1 y z_2

Entonces bastará probar que $L\subset V_\varepsilon(z_0)$

Sea $z(t)=z_1+(z_2-z_1)t$, entonces:

$\|z(t)-z_0\|=\|z_1+(z_2-z_1)t-z_0\|=\|z_1+(z_2-z_1)t-z_0+z_0t-z_0t\|$

$=\|z_1+tz_2-tz_1-z_0+tz_0-tz_0\|=\|(z_1-z_0)+t(z_2-z_0)-t(z_1-z_0)\|$

$=\|(z_1-z_0)(1-t)+(z_2-z_0)t\|$, por la desigualdad triangular

$\le|1-t|\,\|z_1-z_0\|+|t|\,\|z_2-z_0\|$, como $0\le t\le 1\Rightarrow 0\le 1-t\le 1$

$\le(1-t)\|z_1-z_0\|+t\|z_2-z_0\|$

como z_1 y $z_2\in V_\varepsilon(z_0)$, entonces $\|z_1-z_0\|<\varepsilon$ y $\|z_2-z_0\|<\varepsilon$

$\Rightarrow\ \|z(t)-z_0\|\le(1-t)\|z_1-z_0\|+t\|z_2-z_0\|$

$<\varepsilon(1-t)+t\varepsilon=\varepsilon$

como $\|z(t)-z_0\|<\varepsilon$, entonces $L\subset V_\varepsilon(z_0)$

$\therefore\ V_\varepsilon(z_0)$ es poligonalmente conexo.

④ Mediante la función $f(z)=w=z^2$

a) Hallar la imagen del rectángulo $\{(x,y)/0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le 1\}$

b) Hallar la imagen de la recta $y=c$

Desarrollo

a) Sea $z=x+iy$, $w=u+iv$, $z^2=x^2-y^2+2xyi$

como $w=z^2$ entonces $u+iv=x^2-y^2+2xyi$

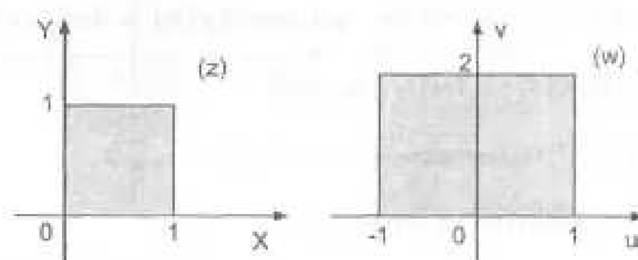
de donde $u=x^2-y^2 \wedge v=2xy$

como $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le x^2\le 1\\ 0\le y^2\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le x^2\le 1\\ -1\le -y^2\le 0\end{cases} \Rightarrow -1\le x^2-y^2\le 1$

$\Rightarrow -1\le u\le 1$

$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases} \Rightarrow 0\le xy\le 1 \Rightarrow 0\le 2xy\le 2 \Rightarrow 0\le v\le 2$

La imagen del triángulo $\{(x,y)/0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le 1\}$, es el rectángulo $\{(u,v)/-1\le u\le 1 \wedge 0\le v\le 2\}$



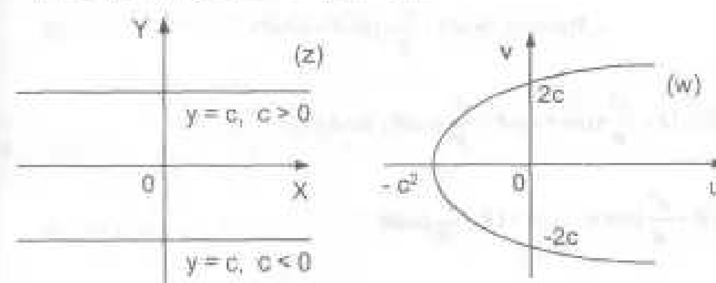
b) Como $u=x^2-y^2 \wedge v=2xy$, $y=c$ de donde

$u=x^2-c^2 \wedge v=2xc \Rightarrow x=\frac{v}{2c}$

$u=\frac{v^2}{4c^2}-c^2 \Rightarrow v^2-4c^4=4c^2u$, de donde

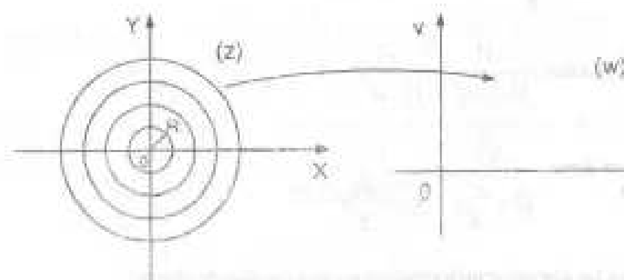
$v^2=4c^2(u+c^2)$ es la ecuación de una parábola con vértice

$V(-c^2,0) \wedge 4p=4c^2 \Rightarrow p=c^2>0$



⑤ Hallar curvas transformables cuando z describe un haz de círculos concéntricos con el origen, mediante la transformación $f(z)=z+\frac{a^2}{z}$

Desarrollo



$z=Re^{i\theta}$, R = radio, $e^{i\theta}=\cos\theta+isen\theta$

$=R(\cos\theta+i\,sen\,\theta)$, $\|e^{i\theta}\|=\sqrt{\cos^2\theta+sen^2\theta}=1$

como $w=f(z)=z+\frac{a^2}{z}$, de donde

$$u+iv=Re^{i\theta}+\frac{a^2}{Re^{i\theta}}=Re^{i\theta}+\frac{a^2}{R}e^{-i\theta}$$

$$u+iv=R(\cos\theta+isen\theta)+\frac{a^2}{R}(\cos(-\theta)+isen(-\theta))$$

$$=R(\cos\theta+isen\theta)+\frac{a^2}{R}(\cos\theta-isen\theta)$$

$u+iv=(R+\frac{a^2}{R})\cos\theta+i(R-\frac{a^2}{R})sen\theta$, de donde

$u=(R+\frac{a^2}{R})\cos\theta \wedge v=(R-\frac{a^2}{R})sen\theta$

$\frac{u}{R+\frac{a^2}{R}}=\cos\theta \wedge \frac{v}{R-\frac{a^2}{R}}=sen\theta$, entonces

$\frac{u^2}{(R+\frac{a^2}{R})^2}+(\frac{v^2}{R-\frac{a^2}{R}})=\cos^2\theta+sen^2\theta=1$

Si $R=1$ se tiene $\frac{u^2}{(1+a^2)^2}+\frac{v^2}{(1-a^2)}=1$

Si $R=2$ se tiene $\frac{u^2}{(2+\frac{a^2}{2})^2}+\frac{v^2}{(2-\frac{a^2}{2})^2}=1$

Por lo tanto las curvas transformables es una familia de elipses

⑥ Hallar la parte real y la parte imaginaria para las funciones:

a) Sean $w=u+iv$; $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$

Reemplazando en $w=f(z)=\bar{z}-iz^2$, se tiene

$u+iv=x-iy-i(x+iy)^2=(x+2xy)+i(y^2-x^2-y)$

$Re(f(z))=Re(w)=x+2xy=u(x,y)$

$Im(f(z))=Im(w)=y^2-x^2-y=v(x,y)$

b) Sean $w=u+iv$, $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$

reemplazando en $w=f(z)=\frac{iz-1}{1+z}$, se tiene

$$w=u+iv=\frac{i(x+iy)+1}{1+x-iy}=\frac{(1-y)+ix}{(1+x)-iy}$$

$$=\frac{[(1-y)+ix][(1+x)+iy]}{[(1+x)-iy][(1+x)+iy]}=\frac{x-2xy-y+1}{(1+x)^2+y^2}+i(\frac{x^2-y^2+x+y}{(1+x)^2+y^2})$$

de donde $u(x,y)=\frac{x-2xy-y+1}{(1+x)^2+y^2}$ y $v(x,y)=\frac{x^2-y^2+x+y}{(1+x^2)+y^2}$

⑦ Expresar la función $f(z)=z^3$, para todo z en la forma $w=u(x,y)+iv(x,y)$, donde $z=x+iy$

Desarrollo

$w=f(z)=(x+iy)^3=x^3+3x^2yi+3xi^2y^2+i^3y^3$

$=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=u(x,y)+iv(x,y)$

a) $f(z) = w = \bar{z} - iz^2$ b) $f(z) = w = \dfrac{iz+1}{1+z}$

Desarrollo

$\therefore\ f(z) = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = u(x,y) + iv(x,y)$

(8) Si $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$, $v(x,y) = 2xy - y$, $w = u(x,y) + iv(x,y)$ expresar w como función de la variable compleja $z = x + iy$

Desarrollo

Se conoce $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Como $w = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y)$

$$= ([\tfrac{1}{2}(z+\bar{z})]^2 - (\tfrac{z-\bar{z}}{2i})^2 + \tfrac{1}{2}(z+\bar{z})) + i((z+\bar{z})(\tfrac{z-\bar{z}}{2i}) - \tfrac{z-\bar{z}}{2i})$$

$$= \frac{1}{4}(2z^2 + 2\bar{z}^2 + 2z + 2\bar{z} + 2z^2 - 2\bar{z}^2 - 2z + 2\bar{z}) = \frac{1}{4}(4z^2 + 4\bar{z}) = z^2 + \bar{z}$$

(9) Expresar $f(z) = \text{sen}\, z$, en la forma $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

Desarrollo

$$f(z) = \text{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\,\text{sen}\,x)}{2i} - \frac{e^{y}(\cos x - i\,\text{sen}\,x)}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\cos x + \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\,\text{sen}\,x = \cosh y\,\text{sen}\,x + i\,\text{senh}\,x.\cos x$$

como $f(z) = \cosh y\,\text{sen}\,x + i\,\text{senh}\,x\cos x$, de donde

$u(x,y) = \cosh y\,\text{sen}\,x$, $v(x,y) = \text{senh}\,x\cos x$

(10) Utilice la definición de límite para demostrar que: $\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = 3 + 9i$

Desarrollo

Para $z = 1$, se tiene $\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z^2+z-2)(z+3i)}{z-1} = \lim\limits_{z\to 1}\frac{(z+2)(z-1)(z+3i)}{z-1}$

$$= \lim_{z\to 1}(z+2)(z+3i) = 3 + 9i$$

entonces: $\lim\limits_{z\to 1}(z+2)(z+3i) = 3 + 9i$ si $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ tal que si

$\|(z+2)(z+3i) - 3 - 9i\| < \varepsilon$, siempre que $0 < \|z - 1\| < \delta$

$\|(z+2)(z+3i) - 3 - 9i\| = \|z^2 + 2z + 3iz + 6i - 3 - 9i\| = \|z^2 + 2z - 3 + 3iz - 3i\|$

$= \|(z-1)(z+3) + 3i(z-1)\| = \|(z-1)(z+3+3i)\|$

$= \|z - 1\|\,\|z + 3 + 3i\|$ ... (1)

pero como $\|z + 3 + 3i\| \le \|z\| + \|3 + 3i\| = \|z\| + 3\sqrt{2}$ ... (2)

Luego de (1) y (2) se tiene:

$\|(z+2)(z+3i) - 3 - 9i\| \le \|z - 1\|(\|z\| + 3\sqrt{2})$ ... (3)

para $\|z-1\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| - 1 \le \|z - 1\| < 1 \Rightarrow \|z\| < 2$

$\|(z+2)(z+3i) - 3 - 9i\| < \|z-1\|(2 + 3\sqrt{2}) = \varepsilon$ entonces $\|z - 1\| = \frac{\varepsilon}{2 + 3\sqrt{2}} = \delta_2$

Luego $\exists\, \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2+3\sqrt{2}}\}$, entonces se tiene que $\|f(z) - (3 + 9i)\| < \varepsilon$, $\forall\ z \in V'_\delta(1)$

$$\therefore\ \lim_{z\to 1}\frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = 3 + 9i$$

(11) Utilice la definición de límite para demostrar que: $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$

Desarrollo

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < \|z - 1\| < \delta \Rightarrow \|\frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3\| < \varepsilon$

$\|\frac{z^3-1}{z-1} - 3\| = \|\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z-1} - 3\| = \|z^2 + z + 1 - 3\| = \|z^2 + z - 2\|$

$= \|z + 2\|\,\|z - 1\| \le \|z - 1\|(\|z\| + 2)$ ... (1)

como $\|z-1\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| - 1 \le \|z - 1\| < 1 \Rightarrow \|z\| < 2$ ... (2)

Luego de (1) y (2) se tiene que:

$\|\frac{z^3-1}{z-1} - 3\| \le \|z-1\|(\|z\| + 2) < \|z-1\|(2+2) = \varepsilon$

$$\therefore\ \|z - 1\| = \frac{\varepsilon}{4} = \delta_2$$

Luego $\exists\, \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$ entonces se tiene que $\|f(z) - 3\| < \varepsilon$, $\forall\ z \in V'_\delta(1)$

$$\therefore\ \lim_{z\to 1}\frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$$

(12) Utilice la definición de límite para demostrar que: $\lim\limits_{z\to 2i} z^4 i + 3z^2 - 10i = -12 + 6i$

Desarrollo

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < \|z - 2i\| < \delta \Rightarrow \|z^4 i + 3z^2 - 10i + 12 - 6i\| < \varepsilon$

$\|z^4 i + 3z^2 - 10i + 12 - 6i\| = \|z^4 i + 3z^2 - 16i + 12\| = \|i(z^4 - 16) + 3(z^2 + 4)\|$

$= \|i(z^2 + 4)(z^2 - 4) + 3(z^2 + 4)\|$

$= \|i(z+2i)(z-2i)(z+2)(z-2) + 3(z+2i)(z-2i)\|$

$\|z^4 i + 3z^2 - 10i + 12 - 6i\| < \|z - 2i\|((3+2)(3+2)(3+2) + 3(3+2)) = \varepsilon$

$\|z - 2i\|(5^3 + 3(5)) = \varepsilon$

$\|z - 2i\| = \frac{\varepsilon}{140} = \delta_2$

Luego $\exists\, \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{140}\}$, entonces se tiene que: $\|f(z) - (-12 + 6i)\| < \varepsilon$, $\forall\ z \in V'_\delta(2i)$

$$\therefore\ \lim_{z\to 2i} iz^4 + 3z^2 - 10i = -12 + 6i$$

(13) Probar que: $\lim\limits_{z\to z_0}\text{Re}(z) = \text{Re}(z_0)$

Desarrollo

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|\text{Re}(z) - \text{Re}(z_0)\| < \varepsilon$

$\|\text{Re}(z) - \text{Re}(z_0)\| = \|\text{Re}(z - z_0)\| \le \|z - z_0\| < \delta = \varepsilon$

por lo tanto es suficiente tomar $\delta = \varepsilon$

(14) Probar que: $\lim\limits_{z\to z_0}\text{Im}(z^2) = \text{Im}(z_0^2)$

Desarrollo

$$= \| z-2i \| \| i(z+2i)(z+2)(z-2)-3(z+2i) \|$$

$$\leq \| z-2i \| [\| z+2i \| \| z+2 \| \| z-2 \| +3 \| z+2i \|]$$

$$\leq \| z-2i \| [(\| z \| +2)(\| z \| +2)(\| z \| +2)+3(\| z \| +2)] \quad ...(1)$$

como $\| z-2i \| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \| z \| -2 \leq \| z-2i \| < 1$

$$\Rightarrow \| z \| < 3 \quad ...(2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene que:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < \| z-z_0 \| < \delta \Rightarrow \| \operatorname{Im}(z^2)-\operatorname{Im}(z_0^2) \| < \varepsilon$

$$\| \operatorname{Im}(z^2)-\operatorname{Im}(z_0^2) \| = \| \operatorname{Im}(z^2-z_0^2) \| \leq \| z^2-z_0^2 \| = \| z+z_0 \| \| z-z_0 \|$$

$$\leq \| z-z_0 \| (\| z \| + \| z_0 \|) \quad ...(1)$$

como $\| z-z_0 \| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \| z \| - \| z_0 \| \leq \| z-z_0 \| < 1$

$$\Rightarrow \| z \| < 1 + \| z_0 \| \quad ...(2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene que:

$$\| \operatorname{Im}(z^2)-\operatorname{Im}(z_0^2) \| < \| z-z_0 \| [1+ \| z_0 \| + \| z_0 \|] = \varepsilon$$

de donde $\| z-z_0 \| = \dfrac{\varepsilon}{1+2\| z_0 \|} = \delta_2$

por lo tanto $\exists\ \delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+2\| z_0 \|}\}$, entonces se tiene:

$\| f(z)-\operatorname{Im}(z_0^2) \| < \varepsilon,\ \forall\ z \in V'_\delta(z_0)$ $\qquad \therefore \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z_0^2)$

(15) Calcular $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z-\operatorname{sen} z}{(z \operatorname{sen} z)^{\frac{3}{2}}}$

Desarrollo

$$\lim_{z \to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{(z \operatorname{sen} z)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{z \to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{(z^2 \frac{\operatorname{sen} z}{z})^{\frac{3}{2}}} = \lim_{z \to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3 (\frac{\operatorname{sen} z}{z})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3} \cdot \frac{1}{(\frac{\operatorname{sen} z}{z})^{\frac{3}{2}}} = \lim_{z \to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{1}{(\frac{\operatorname{sen} z}{z})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1-\cos z}{3z^2} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{1}{(\frac{\operatorname{sen} z}{z})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6}(1) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{z \to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{(z \operatorname{sen} z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6}$$

(16) ¿$\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\| z \|}$ existe?

Desarrollo

Sea $z = x+iy \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = x \\ \| z \| = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{\| z \|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

por lo tanto $\nexists \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\| z \|}$

(17) ¿Existe $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(z^4)}{\| z \|^2}$?

Desarrollo

Supongamos que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(z^4)}{\| z \|^2} = 0$, entonces

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < \| z-0 \| < \delta \Rightarrow \| \dfrac{\operatorname{Re}(z^4)}{\| z \|^2} - 0 \| < \varepsilon$

$$\| \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\| z \|^2} - 0 \| = \frac{\| \operatorname{Re}(z^4) \|}{\| z \|^2} \leq \frac{\| z \|^4}{\| z \|^2} = \| z \|^2 = \| z-0 \|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

de donde $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, por lo tanto $\exists \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(z^4)}{\| z \|^2} = 0$

(18) Calcular el límite $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{(2-z)e^z-z-2}{z^3}$

Desarrollo

Aplicando la regla de L'Hospital se tiene:

$$\lim_{z \to 0} \frac{(2-z)e^z-z-2}{z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{-e^z+(2-z)e^z-1}{3z^2}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{-e^z-e^z+(2-z)e^z}{\cos z} = \lim_{z \to 0} \frac{-ze^z}{6z} = \lim_{z \to 0} -\frac{e^z}{6z} = \lim_{z \to 0} -\frac{e^z}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{z \to 0} \frac{(2-z)e^z-z-2}{z^3} = -\frac{1}{6}$$

(19) Calcular el límite $\lim\limits_{z \to 1+i} (\dfrac{z-1-i}{z^2-2z+2})^2$

Desarrollo

$$\lim_{z \to 1+i} (\frac{z-1-i}{z^2-2z+2})^2 = \lim_{z \to 1+i} (\frac{z-1-i}{[z-(1+i)][z-(1-i)]})^2$$

$$= \lim_{z \to 1+i} (\frac{1}{z-(1-i)})^2 = (\frac{1}{(1+i)-(1-i)})^2 = (\frac{1}{2i})^2 = -\frac{1}{4}$$

(20) Analizar si la función $f(z) = \dfrac{z\operatorname{Re}(z)}{\| z \|}$ es continua en $z = 0$

Desarrollo

Primero veremos si $f(z) = \dfrac{z\operatorname{Re}(z)}{\| z \|}$, podemos definir en $z = 0$

como u y v son continuas en (0,0) se tiene:

$\therefore f(z) = \dfrac{z\operatorname{Re}(z)}{\| z \|}$ es continua en $z = (0,0)$

(21) Se puede definir F(0), para que la función $F(z) = \dfrac{[\operatorname{Re}(z^2)]^4}{\| z \|^8}$ sea continua en $z = 0$.

Desarrollo

Sea $z = x+iy \Rightarrow z^2 = x^2-y^2+2xyi \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = x^2-y^2$

$[\operatorname{Re}(z^2)]^4 = (x^2-y^2)^4,\ \| z \| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \| z \|^8 = (x^2+y^2)^4$

$$F(z) = \frac{(x^2-y^2)^4}{(x^2+y^2)^4} = (\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})^4$$

tomando dos caminos para ver la existencia del límite

$$f(z)=\frac{z\,\text{Re}(z)}{\|z\|}=\frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}i$$

$$\|f(z)\|^2=\frac{x^4+x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=x^2=|x|^2$$

por lo tanto $\|f(z)\|=\|x\|$, pero se conoce que $0\le\|f(z)\|=|x|$

entonces $\lim\limits_{z\to 0}\|f(z)\|=0 \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$

entonces podemos definir $f(0)=0$, es decir: $f(z)=\begin{cases}0 & si\ \ z=0\\ \dfrac{z\,\text{Re}(z)}{\|z\|} & si\ \ z\neq 0\end{cases}$

$u(x,y)=\begin{cases}0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$, $u(x,y)=\begin{cases}0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

Sea $T=\{(x,y)\in R\times R \,/\, y=2x\}$, $S=\{(x,y)\in R \,/\, y=3x\}$

$$\lim_{z\to(0,0)}F(z)=\lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^4=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-4x^2}{x^2+4x^2}\right)^4=\frac{81}{625}$$

$$\lim_{z\to(0,0)}F(z)=\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^4=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-9x^2}{x^2+9x^2}\right)^4=\frac{256}{625}$$

como $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)}F(z)\neq\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)}F(z) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{z\to(0,0)}F(z)$

por lo tanto no se puede definir F(0) para que F(z) sea continua en $z=(0,0)$

(22) Sea $f: C\longrightarrow C$, tal que $f(z+w)=f(z).f(w)$, $\forall\, z,w\in C$. Pruebe que f es continua en (0,0), entonces f es continua en C.

<u>Desarrollo</u>

Por hipótesis f es continua en (0,0), entonces

$\lim\limits_{z\to(0,0)}f(z)=f(0,0)$ y $\lim\limits_{w\to(0,0)}f(w)=f(0,0)$

$\lim\limits_{z\to(0,0)}f(z).\lim\limits_{w\to(0,0)}f(w)=f(0).f(0)=f(0+0)=f(0)$ ... (*)

veamos que f es continua en z_0

$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z-z_0+z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z-z_0)f(z_0)$

$=\underbrace{\lim\limits_{z\to z_0}f(z-z_0)}.\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(0).f(z_0)$

$=\lim\limits_{z-z_0\to 0}f(z-z_0).\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(0).f(z_0)$

pues f es continua en (0,0) de (*)

entonces $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(0).f(z_0)=f(0+z_0)=f(z_0)$

$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0) \Rightarrow$ f es continua en z_0

como z_0 es un arbitrario $\Rightarrow$ f es continua $\forall\, z\in C$

(23) Probar que $F(z)=z^n$, $\forall\, n\in Z_0^+$ es continua en todo C

<u>Desarrollo</u>

Bastará probar que para un $z_0\in C$ arbitrario, se tiene que:

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0 \,/\, 0<\|z-z_0\|<\delta \Rightarrow \|z^n-z_0^n\|<\varepsilon$

$\|z^n-z_0^n\|=\|(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+z^{n-3}z_0^2+...+z.z_0^{n-2}+z_0^{n-1})$

$\le\|z-z_0\|(\|z\|^{n-1}+\|z\|^{n-2}\|z_0\|+...+\|z\|\|z_0\|^{n-2}+\|z_0\|^{n-1})$ ... (1)

como $\|z-z_0\|<\delta$, tomemos $\delta_1=1$

$|\|z\|-\|z_0\||\le\|z-z_0\|<1$

$\|z_0\|-1<\|z\|<1+\|z_0\|$

$\Rightarrow \|z\|<1+\|z_0\|$ y como $\|z^n\|=\|z\|^n$ en (1)

$\|z^n-z_0^n\|\le\|z-z_0\|\underbrace{[(1+\|z_0\|)^{n-1}+\|z_0\|(1+\|z_0\|)^{n-2}+...+(1+\|z_0\|)\|z_0\|^{n-2}+\|z_0\|^{n-1}]}_{k>0}$

$<\delta_2 k=\varepsilon \Rightarrow \delta_2=\dfrac{\varepsilon}{k}>0$

entonces definimos $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{k}\}$

$\therefore\ F(z)=z^n$ es continua en todo C

(24) ¿$F(z)=\dfrac{1}{z}$ es uniformemente continua en $D=\{z\in C \,/\, \frac{1}{2}<\|z\|<1\}$

<u>Desarrollo</u>

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, z,w\in D \,/\, 0<\|z-w\|<\delta \Rightarrow \|\frac{1}{z}-\frac{1}{w}\|<\varepsilon$

$\|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{w}\|=\dfrac{\|w-z\|}{\|z\|\|w\|}$ ... (1)

como $\frac{1}{2}<\|z\|<1$ y $\frac{1}{2}<\|w\|<1 \Rightarrow \frac{1}{4}<\|z\|\|w\|<1$

$\Rightarrow 1<\dfrac{1}{\|z\|\|w\|}<4$, luego de (1) se tiene:

$\|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{w}\|=\dfrac{\|w-z\|}{\|z\|\|w\|}<4\|w-z\|<4\delta=\varepsilon>0$ por lo tanto $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$

$\therefore$ F(z) es uniformemente continua en D.

2.14. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Clasifique los conjuntos de acuerdo a los términos: abierto, cerrado, acotado, conexo y simplemente conexo.

a) $A=\{z\in C \,/\, |\text{Im}(z)|>1\}$ b) $B=\{z\in C \,/\, 0<\|z-1\|\le 1\}$

c) $C=\{z\in C \,/\, \|z\|\le \text{Re}(z)+2\}$

d) $D=\{z\in C \,/\, \|z+1\|+\|z+i\|\ge 2\}$

(7) Mediante la transformación $w=f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$, halle la región del plano $w=u+iv$ que corresponde al plano $z=x+iy$ de la región $x>0,\ y>0$.

(8) ¿En qué curva se transforma la circunferencia $\|z\|=\dfrac{1}{2}$ mediante la función $w=f(z)=\dfrac{1}{2}$

(9) Halle la imagen bajo la transformación $w=(4+2i)z-(3+3i)$ de las rectas $x=c_1$ y $y=c_2$ que conforman la rejilla de coordenadas rectangulares en el plano z, $\forall z\in C$

e) $E = \{z \in C / 2\sqrt{2} < \| z-1 \| + \| z+1 \| < 3\}$

(2) Expresar en la forma $w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ para:

a) $w = \frac{z^2+1}{2z}$ b) $w = z^3 + z + 1$

c) $w = z^3 + 2z^2$ d) $w = z^3 + z^2 + z$

(3) Expresar $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, en la forma $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

(4) Expresar $f(z) = e^{z}$ en la forma $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

(5) Expresar w en la forma $w = f(z)$ para:

a) $w = (x^2 - y^2 - 2x) + i(2x - 2xy)$

b) $w = (x^2 - y^2 - 2y) + i(2x - 2xy)$

c) $w = (x^3 - 3xy^2 + 2x) + i(3x^2y - y^3 - 2y)$

d) $w = \frac{-6(x^2+y^2)+2-x}{4(x^2+y^2)+1-4x} + i\left(\frac{7y}{4(x^2+y^2)+1-4x}\right)$

(6) Mediante la función $w = f(z) = z^3$, halle la imagen de la recta $y = x + 4$ en el plano (w)

(10) Pruebe que la función $w = f(z) = (4+2i)z - (3+3i)$ definida para todo z en C, toda línea recta en el plano z se transforma en una línea recta en el plano w y toda circunferencia en el plano z se transforma en una circunferencia en el plano w.

(11) Utilice la definición de límite para demostrar que:

a) $\lim\limits_{z\to 2i} 2x + iy^2 = 4i$ b) $\lim\limits_{z\to 1+i} z^2 = 2i$

c) $\lim\limits_{z\to 2} \frac{z^2-4}{z-2} = 4$ d) $\lim\limits_{z\to -i} \frac{z^2+1}{z+i} = -2i$

e) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z-1} = 3$ f) $\lim\limits_{z\to 2} \frac{z^2-3z+2}{z-2} = 1$

g) $\lim\limits_{z\to i+1} \frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = 1 - \frac{i}{2}$ h) $\lim\limits_{z\to 1+i} z^2 + 2z = 2 + 4i$

(12) Utilice la definición de límite para demostrar que:

a) $\lim\limits_{z\to 1+i} z^2 - 5z + 10 = 5 - 3i$ b) $\lim\limits_{z\to i} \frac{z^2-2zi-1}{z^4+2z^2+1} = -\frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{z\to 2i} \frac{z^3-8}{z^4+4z^2+16} = \frac{1}{2}(1-i)$ d) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{z\, Re(z)}{\| z \|^2} = \frac{z_0\, Re(z_0)}{\| z_0 \|^2}$

e) $\lim\limits_{z\to -i} \frac{iz^3+1}{z+i} = -3i$ f) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{Im(z)}{z} = \frac{Im(z_0)}{z_0}$, $z_0 \neq 0$

g) $\lim\limits_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-i} = 4 + 4i$

(13) Calcular los siguientes límites si existen:

a) $\lim\limits_{z\to i} \left(\frac{arctg(z^2+1)^2}{sen^2(z^2+1)}\right)$ b) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^3 - z^2 sen z}{(z^3 sen z)^{\frac{2}{3}}}$

c) $\lim\limits_{z\to \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{z - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})iz^2}{z^3+1}$ d) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\frac{-2}{z}}{z^2}$

e) $\lim\limits_{z\to 0} \left[\frac{tg(sen4(sen(sen5z)))}{z}\right]$

(14) Determinar si las funciones son continuas en los puntos indicados.

a) $f(z) = \frac{z^2 - (2+i)z + 2i}{z-i}$ en $z = i$

b) $f(z) = \frac{z^2 + 2(1+i)z + 4i}{z+2}$ en $z = -2i$

(15) ¿La función $f: C \longrightarrow C$, tal que $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z}, & si\ z \neq 0 \\ 0, & si\ z = \pm 1 \end{cases}$ es continua en $z = 0$?

(16) ¿En qué puntos la función $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z^2-1}, & z \neq \pm 1 \\ \frac{3}{2}, & z = \pm 1 \end{cases}$ es continua?

(17) Si $H(z) = \begin{cases} \frac{[Re(z^2)]^2}{\| z \|^2}, & z \neq 0 \\ A, & z = 0 \end{cases}$ ¿Cómo definir A, tal que H sea continua en $z = 0$?

(18) Sea $H(Z) = \frac{z\, Re(z^2)}{\| z \|^2}$, $z \neq 0$ ¿Cómo podemos definir H(0) tal que H sea continua en todo C?

(19) Si $F(z) = \frac{arctg(z^2+1)^2}{sen^2(z^2+1)}$, $z \neq i$ ¿Se puede definir F(i) de tal manera que F sea continua en todo C?

(20) Sea $H(z) = \begin{cases} \frac{z(z^2+(1+i)z+i)}{z(z+i)}, & z \neq 0, -i \\ 1, & z = 0 \\ 1-i, & z = -i \end{cases}$ ¿H es continua en $z = 0, -i$ y por ende en todo C?

(21) Demuestre que la función $f(z) = z^3$ es uniformemente continua en el dominio $0 < \| z \| < 1$

(22) ¿$F(z) = \frac{1}{z}$ es uniformemente continua en $D = \{z \in C / \| z \| < 1\}$

(23) ¿$F(z) = \frac{1}{z}$ es uniformemente continua en $D = \{z \in C / \| z \| > 1\}$

(24) Probar que no es uniformemente continua $F(z) = \frac{1}{z^2}$, en $A = \{z \in C / \| z \| \leq 1\}$

(25) Probar que $G(z) = \frac{1}{1-z}$ en $D = \{z \in C / \| z \| < 1\}$ no es uniformemente continua.

(26) Dada la función $f(z) = z^2 - 4$, $\forall z \in C$, analizar si es uniformemente continua en el conjunto $D = \{z \in C / \| z \| \geq 9\}$.

(27) Probar que $f(z) = \frac{1}{z^2}$ no es uniformemente continua en $A = \{z \in C / \| z \| < 1\}$, pero si en el anillo $B = \{z \in C / \frac{1}{2} \leq \| z \| \leq 1\}$

(28) Probar que $f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z^2 - 2z}$ es uniformemente continua en $D = \{z \in C / \delta < \| z \| < 1\}$ si $0 < \delta < 1$.

(59) Consideremos la función $f: C \to C$, tal que $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z}, & si\ z \neq 0 \\ 0, & si\ z = 0 \end{cases}$ ¿La función f(z) es continua en $z = 0$?

(29) Pruebe que $f(z)=\frac{\text{Re}(z^2)-\text{Im}(z^2)}{\|z\|^2}$, $z\neq 0$ es continua en todo C.

(30) ¿Es continua $f(z)=\begin{cases}\frac{(\text{Im}(z^2))^2}{z^3} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$?

(31) Si $f(z)=\frac{\text{Re}(z)}{z}$, $z\neq 0$ ¿Podemos definir $f(z_0)$, $z_0\neq 0$ para f(z) sea continua?

(32) Demuestre que $f(z)=\log r+i\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, $r>0$ es discontinua sobre el rayo $\theta=0$, note que $z=r\cos\theta+i\,r\,\text{sen}\,\theta$

(33) Determinar el conjunto de valores de z donde la función $f(z)=\text{Re}(\frac{z}{z+1})$ es continua.

(34) Analizar si la función $f(z)=\frac{z\,\text{Re}(z)}{\|z\|}$ es continua en $z=0$.

(35) Si $f(z)=\frac{[\text{Re}(z^3)]^4}{\|z\|^5}$, $z\neq 0$ ¿Qué valor le debemos dar a f(0) de tal manera que f sea continua en C?

(36) Sea $f: C\to C$ tal que $f(z+w)=f(z).f(w)$, $\forall\, z, w\in C$. Pruebe que si f es continua en 0 entonces f es continua en C.

(37) ¿ $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^4}{\|z\|^3} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$ es continua en $z=0$ y por ende en todo C?

(38) ¿Se puede definir f(0) para que la función $f(z)=\frac{[\text{Re}(z^2)]^4}{\|z\|^6}$ sea continua en $z=0$?

(40) Sea $f(z)=\frac{z\,\text{Re}(z^4)}{\|z\|^2}$, $z\neq 0$ ¿Cómo podemos definir f(0) tal que f sea continua en todo C

(41) Determinar si la función f(z) es continua en todo C donde $f(z)=\begin{cases}\frac{z^2+9}{z-3i} & , z\neq 3i\\ 6i & , z=3i\end{cases}$

(42) Si $f(z)=\frac{z(z^2-16)}{z^2-4z}$, $z\neq 0, 4$ ¿Cómo podríamos definir f(0) y f(4) para que f sea continua en todo C?

(43) Sean F, G: $D\subset C\to C$ funciones lineales continuas en $z=z_0$. Demostrar que $H(z)=3F(z)-4i\,G(z)$ es continua en $z=z_0$

(44) Pruebe que $f(z)=kz^n+k_1$, k, k_1 constante $k\neq 0$ es uniformemente continua en $D=\{z\in C\,/\,\|z\|<1\}$

(45) Pruebe que $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-3z+2}$ es continua en todo C exterior a $D=\{z\in C\,/\,\|z\|=2\}$

(46) Determinar si la función f(z) es continua en $z=0$ donde

$$f(z)=\begin{cases}\frac{(\text{Im}(z^2))^2}{\|z\|^3} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$$

(47) Si $f(z)=\begin{cases}\frac{(\text{Im}(z^2))^2}{\|z\|^2} & , z\neq 0\\ A & , z=0\end{cases}$ ¿Qué valor se debe dar a A para que f sea continua en $z=0$?

(48) Suponga que f(z) es una función continua en un dominio D. Pruebe que las funciones dadas son continuas en D.

a) $h(z)=\text{Re}(f(z))$ b) $h(z)=\text{Im}(f(z))$

c) $h(z)=\|f(z)\|$ d) $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$

(49) Demuestre que las funciones dadas son continuas para $z\neq 0$ ¿Puede definirse la función como para hacerla continua en $z=0$?

a) $f(z)=\frac{z\,\text{Re}(z)}{\|z\|^2}$ b) $f(z)=\frac{\|z\|^2}{z}$

c) $f(z)=\frac{\text{Re}(z)\,\text{Im}(z)}{\|z\|^2}$ d) $f(z)=\frac{\text{Re}(z^2)-\text{Im}(z^2)}{\|z\|^2}$

(50) ¿Qué significado tiene que una función no es uniformemente continua?

CAPÍTULO III

3. DERIVADAS DE FUNCIONES COMPLEJAS

La derivada de una función compleja de una Variable Compleja se define, exactamente, de la misma manera que el caso real del cálculo elemental.

3.1. DEFINICIÓN.-

Sea $f: D\subset C\longrightarrow C$, una función compleja de variable compleja, entonces la derivada f' de la función f en el punto z_0 está dado por:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

siempre y cuando el límite exista.

Ejemplo.- Verifica que si $f(z)=z^3$ entonces $f'(z)=3z^2$

Desarrollo

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^3-z^3}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^3+3z^2\Delta z+3z\Delta z^2+\Delta z^3-z^3}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(3z^2+3z\Delta z+\Delta z^2)$$

$$=3z^2+3z(0)+0=3z^2 \qquad \therefore\ f'(z)=3z^2$$

Ejemplo.- Verifica que si $F(z)=\|z\|^2$ entonces $F'(0)=0$

Desarrollo

$$F'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{F(z)-F(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{F(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\|z\|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\,\|z\|^2}{z\bar{z}}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\,\|z\|^2}{\|z\|^2}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0 \qquad \therefore\ F'(0)=0$$

3.2. PROPIEDADES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

Sean f, g: $D\subset C \longrightarrow C$ funciones complejas y k una constante compleja entonces:

① Si $w=f(z)=k \Rightarrow \frac{dw}{dz}=0$

② Si $w=k\,f(z) \Rightarrow \frac{dw}{dz}=k.f'(z)$

③ Si $w=f(z)\pm g(z) \Rightarrow \frac{dw}{dz}=f'(z)\pm g'(z)$

④ Si $w=(f.g)(z) \Rightarrow \frac{dw}{dz}=f'(z).g(z)+f(z).g'(z)$

⑤ Si $w=\frac{f(z)}{g(z)} \Rightarrow \frac{dw}{dz}=\frac{g(z).f'(z)-f(z).g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z)\neq 0$

La demostración de estas propiedades son idénticas al de las funciones reales del cálculo elemental, demostraremos la propiedad (4).

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z).g(z+\Delta z)-f(z).g(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z).g(z+\Delta z)-f(z+\Delta z).g(z)+f(z+\Delta z).g(z)-f(z).g(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(f(z+\Delta z).[\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}]+g(z).[\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}])$$

$$=f(z)\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}+g(z)\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=f(z).g'(z)+g(z).f'(z)$$

3.3. DEFINICIÓN.-

La función $f: D\subset C \longrightarrow C$ es derivable en el punto $z_0\in D$, si existe la derivada en z_0 $(f'(z_0))$ es decir:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

Lo que es equivalente a:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

donde $\Delta z=z-z_0$ entonces $z=z_0+\Delta z$

además si $\Delta z\longrightarrow 0$ entonces $z-z_0\to 0$

de donde $z\to z_0$

$$\Delta z=z-z_0=(x+iy)-(x_0+iy)=(x-x_0)+(y-y_0)i=\Delta x+i\,\Delta y$$

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

$\Delta z\longrightarrow 0$, entonces $\Delta x+i\Delta y\longrightarrow 0$

de donde $\Delta x\longrightarrow 0 \wedge \Delta y\longrightarrow 0$

por lo tanto: $(\Delta x,\Delta y)\longrightarrow(0,0)$

Ejemplo.- ¿La función $f(z)=z\bar{z}$ es derivable en todo C?

Desarrollo

Sea $z_0\in C$ arbitrario pero fijo

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z\bar{z}-z_0\bar{z_0}}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\|z\|^2-\|z_0\|^2}{z-z_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{(x^2+y^2)-(x_0^2+y_0^2)}{(x+iy)-(x_0+iy_0)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{(x^2+x_0^2)+y^2-y_0^2}{(x-x_0)+(y-y_0)i}=\lim_{\substack{x-x_0\to 0\\ y-y_0\to 0}}\frac{(x+x_0)(x-x_0)+(y+y_0)(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(x+x_0)\Delta x+(y+y_0)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+x_0)\Delta x+(y+y_0)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y})$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(\frac{(y+y_0)\Delta y}{i\Delta y})=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{y+y_0}{i}=-i(y+y_0)$$

$$f'(z_0)=-i(y+y_0) \qquad \dots(1)$$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(x+x_0)\Delta x+(y+y_0)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y})$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+x_0)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(x+x_0)=x+x_0$$

$$f'(z_0)=x+x_0 \qquad \dots(2)$$

como $f'(z_0)\neq f'(z_0)$ entonces $\nexists\, f'(z_0)$, por lo tanto $f(z)=z\bar{z}$ no es derivable en ningún punto de C salvo en el origen.

Ejemplo.- ¿La función $f(z)=\bar{z}$ es derivable?

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x-iy)-(x_0-iy_0)}{(x+iy)-(x_0+iy_0)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x-x_0)-(y-y_0)i}{(x-x_0)+(y-y_0)i}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$f'(z_0)=1 \qquad \dots(1)$$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y})=\lim_{\Delta y\to 0}(-\frac{i\Delta y}{i\Delta y})=-1$$

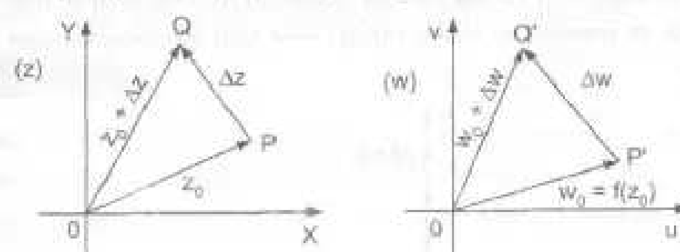
$$f'(z_0)=-1 \qquad \dots(2)$$

como $f'(z_0)\neq f'(z_0)$, entonces $\nexists\, f'(z_0)$ es decir que $f(z)=\bar{z}$ no es derivable en ningún punto de C.

OBSERVACION.- La función $f: D\subset C\longrightarrow C$ es derivable en D si "f" es derivable en cada punto de D.

3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.-

Sea $f: D\subset C\longrightarrow C$ una función compleja y $z_0\in D$ un punto P en el plano complejo (z) y sea w_0 su imagen P' en el plano (w) bajo la transformación $w=f(z)$, puesto que se supone que f(z) es unívoca, el punto z_0 es aplicado sólo en el punto w_0.



Al incrementar a z_0 en Δz se obtiene el punto Q este punto tiene como imagen a Q' en el plano (w), entonces se observa que P'Q' representa al número complejo $\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$, se reduce que la derivada en z existe y está dado por:

Desarrollo

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$$

$\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$, se deduce que la derivada en P existe y está dado por:

$$\boxed{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{Q\to P}\frac{Q'P'}{QP}}$$

3.5. ECUACIONES DE CAUCHY – RIEMANN.-

Se trata de obtener un par de ecuaciones que deben satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes u y v de una función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ en un punto $z_0=(x_0,y_0)$ para que exista en el, la derivada de f, así mismo veremos como expresar $f'(z_0)$ en términos de tales derivadas parciales.

Suponiendo que $\exists f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to(0,0)}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, sea $z_0=x_0+iy_0$ y $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, entonces por el teorema de límite se tiene:

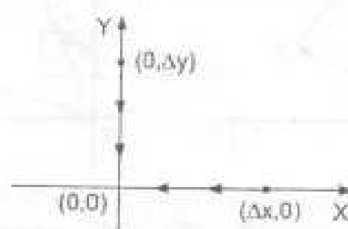
$$\operatorname{Re}(f'(z_0))=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\operatorname{Re}\Big(\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\Big) \quad ...(1)$$

$$\operatorname{Im}(f'(z_0))=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\operatorname{Im}\Big(\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\Big) \quad ...(2)$$

ahora agrupando se tiene:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{[u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)]}{\Delta x+i\Delta y} \quad ...(3)$$

Las expresiones (1) y (2) son variables cuando $(\Delta x,\Delta y)\longrightarrow(0,0)$ de todas las formas posibles, en particular es cuando $(\Delta x,\Delta y)\longrightarrow(0,0)$ horizontalmente por los puntos $(\Delta x,0)$.



Quiere decir que $\Delta y = 0$ en la ecuación (3) resultan:

$$\operatorname{Re}(f'(z_0))=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\operatorname{Im}(f'(z_0))=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}, \text{ esto es:}$$

$$\boxed{f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)} \quad ...(4)$$

donde $u_x(x_0,y_0)$, $v_x(x_0,y_0)$ son las derivadas parciales con respecto a x de las funciones u y v en el punto (x_0,y_0)

ahora haremos tender $(\Delta x,\Delta y)\longrightarrow(0,0)$ verticalmente por los puntos $(0,\Delta y)$, es decir $\Delta x = 0$, en la ecuación (3) resulta.

$$\boxed{f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)} \quad ...(5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) no solamente dan $f'(z_0)$ en términos de las derivadas parciales de las funciones componentes u y v, sino que proporciona condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$.

Al igualar las partes real e imaginaria de las ecuaciones (4) y (5) vemos que la existencia de $f'(z_0)$ exige que:

$$\boxed{u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \ \text{ y } \ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)} \quad ...(6)$$

Las ecuaciones de (6) son las ecuaciones de CAUCHY – RIEMANN.

3.6. TEOREMA.-

Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función compleja definida en alguna región D que contiene al punto z_0 y que tiene primeras derivadas parciales continuas, con respecto a x e y, y que satisfacen las ecuaciones de CAUCHY – RIEMANN en z_0, entonces $f'(z_0)$ existe.

Demostración

Si $x\neq x_0$ y $y\neq y_0$, el cociente de la diferencia se puede escribir.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)}{z-z_0}+i\frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)}{z-z_0}$$

$$=\frac{x-x_0}{z-z_0}\Big[\frac{u(x,y)-u(x_0,y)}{x-x_0}+i\frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\Big]$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}\Big[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}+i\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\Big]$$

$$=\frac{x-x_0}{z-z_0}[u_x(x_0+t_1(x-x_0),y)+iv_x(x_0+t_2(x-x_0),y)]$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}[u_y(x_0,y_0+t_3(y-y_0))+iv_y(x_0,y_0+t_4(y-y_0))]$$

donde $0<t_k<1$, k = 1,2,3,4, por le teorema del valor medio del cálculo diferencial, este teorema también se cumple para $x=x_0$ y $y=y_0$; como las derivadas parciales son continuas en z_0, podemos escribir en la forma.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x-x_0}{z-z_0}[u_x(z_0)+iv_x(z_0)+\varepsilon_1]+\frac{y-y_0}{z-z_0}[u_y(z_0)+iv_y(z_0)+\varepsilon_2]$$

donde $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$, cuando $z\to z_0$

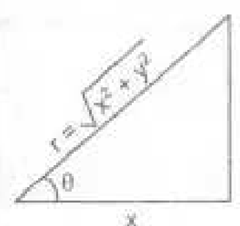
aplicando las ecuaciones de CAUCHY – RIEMANN al último término, se puede combinar los términos para obtener

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=u_x(z_0)+iv_x(z_0)+\frac{(x-x_0)\varepsilon_1+(y-y_0)\varepsilon_2}{z-z_0}$$

3.7. ECUACIONES DE CAUCHY – RIEMANN EN COORDENADAS POLARES.-

Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función compleja, transformaremos esta función a coordenadas polares,

$$\boxed{f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)}$$



La relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares es: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $\theta=\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$

Calcularemos las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y, para esto aplicaremos la regla de la cadena.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x} & ...(1)\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y} & ...(2)\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x} & ...(3)\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y} & ...(4)\end{cases}$$

como $|x-x_0||y-y_0|\leq|z-z_0|$, la desigualdad nos conduce

$$\left\|\frac{(x-x_0)\varepsilon_1+(y-y_0)\varepsilon_2}{z-z_0}\right\|\leq\|\varepsilon_1\|+\|\varepsilon_2\|\to 0 \text{ cuando } z\to z_0$$

por lo tanto el último término tiende a cero cuando $z\to z_0$, luego al tomar límite, el último término tiende a cero cuando $z\to z_0$.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=u_x(z_0)+iv_x(z_0)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{r}=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta\\ \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{r}=\dfrac{r\,\text{sen}\,\theta}{r}=\text{sen}\,\theta\end{cases}$$

$$\theta=\text{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}=-\dfrac{y}{r^2}=-\dfrac{r\,\text{sen}\,\theta}{r^2}=-\dfrac{1}{r}\text{sen}\,\theta\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{r^2}=\dfrac{r\cos\theta}{r^2}=\dfrac{1}{r}\cos\theta\end{cases}$$

Ejemplo de Aplicación.-

1) Expresar f_z y $f_{\bar{z}}$ en términos f_x y f_y y después f_x y f_y en términos de f_z y $f_{\bar{z}}$ de la función f(z) = u(x,y) + i v(x,y).

Desarrollo

f(z) = f(x + iy) = f(x,y) donde $f: R^2\to R$

f → x → z, $\bar{z}$; f → y → z, $\bar{z}$

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

$$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=i.\frac{\partial f}{\partial z}-i.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=i\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$$

En forma de operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i.\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i.\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

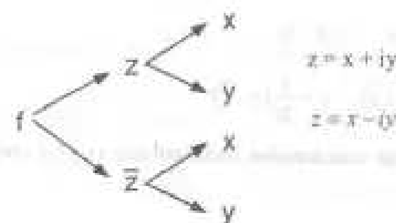
2) Expresar la ecuación de CAUCHY – RIEMANN en coordenadas conjugadas donde

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{\bar z} = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

como $f(x,y) = f\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)$



f = u + iv.

Desarrollo

Se conoce que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, lo que es igual

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad i.\frac{\partial u}{\partial y} + i.\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Sumando $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ i.\frac{\partial u}{\partial y} + i.\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i.\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + i.\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i.\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv) = 0$$

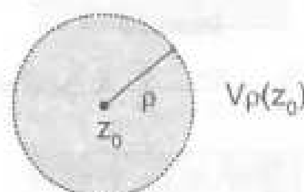
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i.\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = 0$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar z}(u+iv) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial \bar z}(u+iv) = 0$$

entonces $\boxed{\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z) = 0}$ ecuaciones de CAUCHY – RIENMANN en coordenadas conjugadas.

3.9. FUNCIONES ANALÍTICAS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Diremos que la función $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en el punto $z_0 \in D$, si f está definida y es derivable en alguna vecindad de z_0, es decir "f" es analítica en z_0 si: $\exists\, V_\rho(z_0)$ tal que f está definida en $V_\rho(z_0)$ y $\exists f'(z_0)$, $\forall z \in V_\rho(z_0)$.



b) **DEFINICIÓN.-** La función $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en D, si f es derivable $\forall z \in D$.

OBSERVACIÓN.- A la función analíticas también se le llaman función regular o holomorfa.

OBSERVACIÓN.- La derivada de una función analítica u holomorfa también es analítica, de aquí es que una función analítica tiene derivadas de todos los ordenes.

c) **DEFINICIÓN.-** Si la función $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en todo C, se le llama función entera.

Ejemplos.-

1) Las funciones cos z, sen z, e^z son analíticas en todo **C**.

2) ¿ $F(z) = \bar z$ es analítica?

La función $F(z) = \bar z$ no es derivable, en ningún punto del plano complejo, por lo tanto $F(z) = \bar z$ no es analítica.

d) **DEFINICIÓN.-** Toda función f(z) = u(x,y) + i v(x,y) en donde las funciones u y v tiene primeras derivadas parciales continuas y satisfacen las ecuaciones de CAUCHY – RIEMANN en algún dominio D entonces f es analítica en D.

Ejemplo.- Determinar si la función es analítica en C, donde $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, f(z) = e^z$.

Desarrollo

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

de donde $u(x,y) = e^x \cos y$, y, $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y,\; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y,\; \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y,\; \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y$$

existen y son continuas en todo R^2 y como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},\; \forall (x,y) \in R^2$$

entonces $f(z) = e^z$ es analítica en todo C, donde

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x seny = e^x(\cos y + iseny) = e^x.e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

$$\therefore\; f'(z) = e^z$$

3.10. FUNCIONES ARMÓNICAS.-

Si la función f(z) = u(x,y) + i v(x,y) es analítica en D entonces:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \;\wedge\; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x},\; \forall (x,y) \in D$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \;\wedge\; \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y \partial x}$$

como $\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y \partial x}$, ∀ (x,y) ∈ D puesto que sus derivadas parciales son

OBSERVACIÓN.- Las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$$

se llaman ecuaciones de Laplace en dos variables que en física se conoce con el nombre de ecuación de potencial.

DEFINICIÓN.- Toda función F(z) = u(x,y) + i v(x,y) que satisface las ecuaciones de Laplace se llaman "Funciones armónicas" y F(z) = u(x,y) + i v(x,y) es analítica, entonces u y v se llaman "conjugadas armónicas"

continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0,\ \forall (x,y)\in D$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}\end{cases},\ \text{sumando}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=0,\ \forall (x,y)\in D$$

por lo tanto las partes real e imaginaria de una función compleja f(z) = u(x,y) + i v(x,y) analíticas son soluciones de la ecuación de Laplace, donde

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{(ecuación de Laplace de u)}$$

$$\nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad \text{(ecuación de Laplace de v)}$$

En este caso se dice también que u y v son funciones armónicas, además u y v son un par de conjugadas armónicas una con respecto a la otra.

Ejemplos.-

1) Si $u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$ que:

i) u es armónica.

ii) Hallar el conjugado armónico V / F = u + iv

iii) Expresar F en función de z.

Desarrollo

i) $\begin{cases}u_x=4x^3-12xy^2\\ u_y=-12x^2y+4y^3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_{xx}=12x^2-12y^2\\ u_{yy}=-12x^2+12y^2\end{cases}$

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

por lo tanto u es armónica.

ii) $\exists\, V:R^2\to R$ / F = u + iv, sabemos que: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ esto es:

$v_y=u_x=4x^3-12xy^2$, integrada respecto a y

$v=\int(4x^3-12xy^2)d+h(x)$, de donde

$v=4x^3y-4xy^3+h(x)$, derivando se tiene:

$$v_x(x,y)=12x^2y-4y^3+h'(x)=-u_y=12x^2y-4y^3$$

$h'(x)=0 \Rightarrow h(x)=C$, de donde $v(x,y)=4x^3y-4xy^3+C$

iii) $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3+C)$

$F(z)=(x+iy)^4+iC=z^4+iC$

$$\therefore\ F(z)=z^4+iC$$

2) Hallar una función analítica F(z) tal que: $\text{Re}(F'(z))=3x^2-4y-3y^2$ y F(1+i)=0

Desarrollo

F(z) = u(x,y) + i v(x,y) donde $u,v:R^2\to R$

además $F'(z)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$, de donde

$\text{Re}(F'(z))=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2$, integrando respecto a x.

$u(x,y)=\int(3x^2-4y-3y^2)dx+C \Rightarrow u(x,y)=x^3-4xy-3xy^2+C$

ahora veremos si u(x,y) es armónico.

$\begin{cases}u_{xx}=3x^2-4y-3y^2\\ u_y(x,y)=-4x-6xy\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_{xx}=6x\\ u_{yy}=-6x\end{cases}$ sumando

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

entonces u es armónico $\Rightarrow \exists$ v / F = u + iv, además $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ecuaciones de Cauchy - Riemann

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2$, integrando respecto a y.

$v(x,y)=\int(3x^2-4y-3y^2)dy+h(x)$

$v=3x^2y-2y^2-y^3+h(x)$ derivando respecto a x

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+h'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=4x+6xy$

$h'(x)=4x \Rightarrow h(x)=2x^2+k$

$$v(x,y)=3x^2y-2y^2-y^3+2x^2+k$$

$F(z)=x^3-4xy-3xy^2+c+i(3x^2y-2y^2-y^3+2x^2)+ki$

F(1 + i) = F(1,1) = 1 − 4 − 3 + c + i(3 − 2 − 1 + 2 + k)

$-6+c+(2+k)i=0 \Rightarrow \begin{cases}-6+c=0\\ 2+k=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}c=6\\ k=-2\end{matrix}$

$F(z)=x^3-4xy-3xy^2+6+i(3x^2y-2y^2-y^3+2x^2-2)$

$F(z)=z^3+2iz^2+6-2i$

donde $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

3.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Dada la función $f(z)=\dfrac{1}{z}$, pasar a coordenadas polares y analizar la existencia de $f'(z)$. $\forall z\neq 0$.

Desarrollo

Sea $z=x+iy=r\cos\theta+ir\,sen\theta=r(\cos\theta+i\,sen\theta)=re^{i\theta}$

Como $f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{re^{i\theta}}=r^{-1}e^{-i\theta}=r^{-1}(\cos\theta-i\,sen\theta)$ }

$\therefore\ f(z)=r^{-1}(\cos\theta-i\,sen\theta)$ en coordenadas polares

por otro lado tenemos que:

$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}i$, donde

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

como satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann ⇒ f(z) es analítica.

$u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ y $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, de lo cual

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ;\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\ ;\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Observamos que: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\ \wedge\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

Para $(x,y)\neq(0,0)$ o $z\neq 0$ donde las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ existen y son continuas y verifican las ecuaciones de Cauchy – Riemann por lo tanto $f'(z)$ existe $\forall\ z\neq 0$.

② Diga si la función $f(z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\,arctg\dfrac{y}{x}$ es analítica.

Desarrollo

f(z) es analítica si satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann

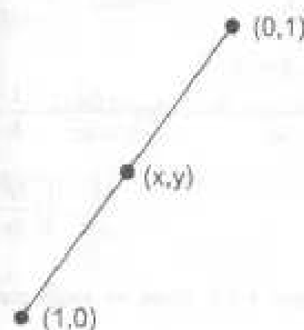
como $f(z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\,arctg\dfrac{y}{x}$, entonces tenemos

$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ y $v(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

③ Sean $f(z)=z^3$, $z_1=1$, $z_2=i$. Pruebe que no existe un punto z_0 sobre el segmento de recta que une a z_1 y z_2 tal que $f(z_2)-f(z_1)=f'(z_0)(z_2-z_1)$. Esto demuestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas.

Desarrollo



$(x,y)=(1,0)+t(-1,1)=(1-t,t)$

$\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$

$z_0=(1-t)+it$

$f(z_2)=f(i)=i^3=-i$

$f(z_1)=f(1)=1^3=1$

pero $f'(z)=3z^2\ \Rightarrow\ f'(z_0)=3[(1-t)+it]^2$ ... (1)

por otro lado $f'(z_0)=\dfrac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=\dfrac{-i-1}{i-1}=i$ ... (2)

igualando (1) y (2) se tiene: $3[(1-t)+it]^2=i$

$3[(1-t)^2+2it(1-t)-t^2]=i\ \Rightarrow\ 3[1-2t+2it(1-t)]=i$

$\underbrace{3(1-2t)=0}_{t=\frac{1}{2}}\ \wedge\ 6t(1-t)=1$

Si $t=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ 6(\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{2}\neq 1$

Por lo tanto el teorema del valor medio no se cumple.

④ Si $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ y $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, Deducir: $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial F}{\partial x}i\dfrac{\partial F}{\partial y})$

Desarrollo

Calculando las derivadas $\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}},\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}$ se tiene:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}=\lim_{\Delta\bar{z}\to 0}\frac{x(x,\bar{z}+\Delta\bar{z})-x(z,\bar{z})}{\Delta\bar{z}}=\lim_{\Delta\bar{z}\to 0}\frac{\frac{z+\bar{z}+\Delta\bar{z}}{2}-\frac{z+\bar{z}}{2}}{\Delta\bar{z}}=\lim_{\Delta\bar{z}\to 0}\frac{\Delta\bar{z}}{2\Delta\bar{z}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\lim_{\Delta\bar{z}\to 0}\frac{y(z,\bar{z}+\Delta\bar{z})-y(z,\bar{z})}{\Delta\bar{z}}=\lim_{\Delta\bar{z}\to 0}\frac{\frac{z-\bar{z}-\Delta\bar{z}}{2}-\frac{z-\bar{z}}{2}}{\Delta\bar{z}}=\lim_{\Delta\bar{z}\to 0}\frac{-\Delta\bar{z}}{2i\Delta\bar{z}}=-\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{1}{2})+\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{i}{2})\qquad \therefore\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y})$$

⑤ Si $f(x)=e^x(\cos y+i\,sen\,y)$. Demostrar que $f'(z)$ existe en todas partes de C y hallarse $f'(z)$

Desarrollo

Como $f(x)=e^x(\cos y+i\,sen\,y)=e^x\cos y+ie^x\,sen\,y$, de donde

$u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\,sen\,y$ sus primeras derivadas existen y son continuas en el punto (x_0,y_0), luego si $f'(z_0)$ existe en todos los puntos, también $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe y es igual a $f'(z_0)$, es decir:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x,y)-v(x_0,y_0)]}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

el límite puede evaluarse en $x=x_0$, entonces:

$$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x_0,y)-v(x_0,y_0)]}{i(y-y_0)}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}-i\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\therefore\ f'(z)=v_y-iu_y$

entonces $f'(z)$ existen en todas partes, ahora hallaremos $f'(z)$

$f(z)=e^x(\cos y+i\,sen\,y)=e^x\cos y+ie^x\,sen\,y$, donde $u=e^x\cos y$, $v=e^x\,sen\,y$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\,sen\,y)-i\frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)=e^x\cos y+ie^x\,sen\,y=f(z)$$

$\therefore\ f'(z)=f(z)$

⑥ Analizar si la función dada satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (0,0).

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}+i\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Desarrollo

De f(z) se tiene: $u(x,y)=\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$; $v(x,y)=\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$, donde

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}=1$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y}=0$$

$$v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x}=0$$

de los resultados de (α) y (β) satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann.

Ahora analizaremos si $\exists\ f'(0)$

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z}$$

como $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$, $\Delta z\to(0,0)$ horizontalmente $\Delta y=0$

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=1$$

$\Delta z\to(0,0)$ verticalmente $\Delta x\to 0$

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta y)}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{(\Delta y)^3 i}{(\Delta y)^2}}{i\Delta y}=1$$

para $\Delta x=\Delta y$, $\Delta z=(\Delta x,\Delta y)$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta x)}{\Delta x+i\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^3-\Delta x^3}{2\Delta x^2}+\frac{\Delta x^3-3\Delta x^3}{2(\Delta x)^2}}{\Delta x(1+i)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(1+i)}=\frac{-1}{1+i}\qquad\therefore\ f'(0)\ \text{no existe}$$

9) Analizar si la función dada satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en el origen (0,0) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3}+\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}i & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{x^3}}{x}=1$$

$$v_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0+y^3}{0+y^2}}{y}=1$$

$$\therefore\ u_x(0,0)=v_y(0,0)=1\qquad\ldots(\alpha)$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0-y^4}{0+y^3}}{y}=-1$$

$$v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4+0}{x^3+0}}{x}=1$$

$$\therefore\ u_y(0,0)=-v_x(0,0)=-1\qquad\ldots(\beta)$$

por lo tanto de (α) y (β) la función f(z) satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (0,0).

10) ¿Es analítica $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{iy}{x^2+y^2}$?

Desarrollo

Si f(z) cumple con las ecuaciones de Cauchy – Riemann ⇒ f(z) es analítica

Desarrollo

De la función f(z) se obtiene:

Si f(z) cumple con las ecuaciones de Cauchy – Riemann → f(z) es analítica

Luego de $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$ se obtiene las funciones componentes

$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$u_x(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $v_y(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, de donde $u_x(x,y) \neq v_y(x,y)$

como una de las ecuaciones de Cauchy - Riemann no se verifica es suficiente para decir que f(z) no cumple las ecuaciones de Cauchy – Riemann por lo tanto f(z) no es analítica.

(11) ¿La función $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\,sen\,x)$ es analítica en todo C?

Desarrollo

Para que f(z) sea una función analítica debe cumplir con las ecuaciones de Cauchy – Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ de $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\,sen\,x) = e^{-y}\cos x + ie^{-y}sen\,x$

se obtiene: $u(x,y) = e^{-y}\cos x$ y $v(x,y) = e^{-y}sen\,x$, de donde

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -e^{-y}sen\,x \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -e^{-y}sen\,x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad ...(1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -e^{-y}\cos x \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = e^{-y}\cos x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad ...(2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene las condiciones de Cauchy – Riemann entonces la función $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\,sen\,x)$ es analítica en todo C.

(12) Si F: D ⊂ C ⟶ C es analítica en C, probar que: $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{\partial y}$ donde w = F(z)

Desarrollo

Mediante las coordenadas conjugadas tenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i}(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}), \text{ por ser analítica } u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}i + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad ...(1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}) = -i\frac{\partial F}{\partial y} = -i\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{\partial y} \quad ...(2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene: $\therefore \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{\partial y}$

(13) Si w = f(z) es analítica, expresar en coordenadas polares (r,θ) y probar que: $\frac{\partial w}{\partial z} = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$

Desarrollo

w = f(z) = u(r,θ) + i v(r,θ), $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} = u_r + iv_r$

como f(z) es analítica ⇒ cumple con la ecuación de Cauchy – Riemann en coordenadas polares que son $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$, $v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$ (esto es por coordenadas conjugadas)

$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{1}{2i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\theta.\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}sen\theta.\frac{\partial u}{\partial \theta}] + \frac{i}{2}[\cos\theta.\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}sen\theta.\frac{\partial v}{\partial \theta}]$$

$$+ \frac{1}{2i}[sen\theta.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta.\frac{\partial u}{\partial \theta}] + \frac{1}{2}[sen\theta.\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta.\frac{\partial v}{\partial \theta}]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\theta.\frac{\partial u}{\partial r} + sen\theta(-\frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}) + i\cos\theta.\frac{\partial v}{\partial r} - i\,sen\theta.(\frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta})$$

$$-i(sen\theta.\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta(\frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta})) + sen\theta.\frac{\partial v}{\partial r} + \cos\theta(\frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta})] \quad ...(1)$$

pero $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$, $v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$ ...(2)

reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}[\cos\theta.u_r + sen\theta.v_r + i\cos\theta.v_r - i\,sen\theta.u_r - i\,sen\theta.u_r + i\cos\theta.v_r + sen\theta.v_r + \cos\theta.u_r]$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos\theta.u_r + 2sen\theta.v_r + 2i\cos\theta.v_r - 2i\,sen\theta.u_r]$$

$$= (\cos\theta - i\,sen\theta)u_r + i(\cos\theta - i\,sen\theta)v_r$$

Se conoce que: $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r} & ...(1) \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} & ...(2) \end{cases}$

Primero eliminaremos v, entonces para esto diferenciamos (1) parcialmente respecto a r y (2) respecto a θ.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{\partial r}{\partial r}.\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \quad ...(3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad ...(4)$$

Suponiendo que las derivadas parciales son continuas se debe tener que: $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}$

Luego igualando (3) y (4) se tiene:

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \text{ de donde } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

ahora trabajaremos en la misma forma para v(r,θ)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad ...(5)$$

$$=e^{-i\theta}u_r+ie^{-i\theta}v_r=e^{-i\theta}(u_r+v_r)=e^{-i\theta}w_r \qquad \therefore \quad \frac{\partial w}{\partial z}=w_r=e^{-i\theta}v_r$$

(14) Sea f(z) = u(r,θ) + i v(r,θ) una función analítica en un dominio D que no incluya el origen. Demostrar que las ecuaciones de Laplace en su forma polar, está dado por la función u(r,θ) como: $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$, sabiendo que las derivadas parciales son continuas. De igual forma pruebe para v(r,θ).

Desarrollo

de (1) y (2) se tiene: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$ ... (6)

diferenciando (5) respecto a θ y (6) respecto a r, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial u\partial \theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}} \quad \ldots (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}(-r)\frac{\partial v}{\partial r}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}=-\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}} \quad \ldots (8)$$

como las derivadas parciales son continuas se tiene que: $\frac{\partial^2 u}{\partial u\partial \theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial u}$

Luego igualando (7) y (8) y se obtiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=-\frac{\partial v}{\partial r}-r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \text{ de donde } r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta}=0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0$$

(15) Demuestre que la función f(z) = Re(z) no posee derivadas en ningún valor de z.

Desarrollo

Sea z = x + iy un punto cualquiera del plano complejo C, entonces elegimos una vecindad cualquiera $v_r(z)$ de z y dos puntos $z_1'=(x,y+k)$ u $z_2'=(x+k,y)$, k < r que estarían en $v_r(z)$

$$\lim_{z'\to z}\frac{R(z')-R(z)}{z'-z}=\lim_{z'\to z}\frac{x'-x}{(x'-x)+i(y'-y)}$$

calculando el valor cuando $z'=z_1$ y después $z'=z_2$

$$\lim_{(x',y')\to(x,y+k)}\frac{x'-x}{(x'-x)+i(y'-y)}=\frac{x-x}{(x-x)+i(y+k-y)}=\frac{0}{ik}=0 \quad \ldots (1)$$

$$\lim_{(x',y')\to(x+k,y)}\frac{x'-x}{(x'-x)+i(y'-y)}=\frac{x+k-x}{x+k-x+i(y-y)}=\frac{k}{k}=1 \quad \ldots (2)$$

de (1) y (2) se concluye que $\nexists \lim_{z'\to z}\frac{Re(z')-Re(z)}{z'-z}$ esto demuestra que f(z) no posee derivada en ningún punto del plano C.

(16) Demuestre que si la función f(z) = u(x,y) + i v(x,y) es derivable en el punto z = x + iy, entonces se satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en el punto z.

Desarrollo

Como f(z) es derivable en z entonces ∃ $f'(z)$ es decir:

$$f'(z)=\lim_{z'\to z}\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}=\lim_{z'\to z}\frac{[u(x,y')-u(x,y)]+i[v(x',y')-v(x,y)]}{(x'-x)+i(y'-y)}$$

Si a este límite evaluamos de dos formas para $x'=x$ entonces:

$$f'(z)=\lim_{y'\to y}\frac{[u(x,y')-u(x,y)]+i[v(x,y')-v(x,y)]}{(x-x)+i(y'-y)}$$

$$=\lim_{y'\to y}\frac{u(x,y')-u(x,y)}{i(y'-y)}+\lim_{y'\to y}\frac{v(x,y')-v(x,y)}{y'-y}$$

$$=-i\lim_{y'\to y}\frac{u(x,y')-u(x,y)}{y'-y}+\lim_{y'\to y}\frac{v(x,y')-v(x,y)}{y'-y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}, \text{ es decir:}$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots (1)$$

evaluando para $y'=y$ entonces:

$$f'(z)=\lim_{x'\to x}\frac{[u(x',y)-u(x,y)]+i[v(x',y)-v(x,y)]}{x'-x+i(y-y)}$$

$$=\lim_{x'\to x}\frac{u(x',y)-u(x,y)}{x'-x}+i\lim_{x'\to x}\frac{v(x',y)-v(x,y)}{x'-x}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots (2)$$

comparando (1) y (2) se obtiene: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

esto demuestra que si $f'(z)$ existe en el punto z entonces las ecuaciones de Cauchy – Riemann se verifican en ese punto.

(17) Si la función f(z) es analítica en z_0. Demostrar que f(z) es continua en z_0.

Desarrollo

A la expresión $f(z_0+h)-f(z_0)$, escribiremos en la forma

$f(z_0+h)-f(z_0)=\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}h$ donde $h=\Delta z\neq 0$ entonces tomando límite ambos miembros cuando $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}[f(z_0+h)-f(z_0)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.\lim_{h\to 0}h$$

$=f'(z_0)\cdot 0=0$, puesto que $f'(z_0)$ existe por hipótesis entonces:

$$\lim_{h\to 0}[f(z_0+h)-f(z_0)]=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}f(z_0+h)=f(z_0)$$

con lo cual queda demostrado que f(z) es continua en z_0.

(18) Dar un ejemplo que la recíproca del ejercicio (17) no es necesariamente cierta.

(20) Comprobar que $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ es armónica, hallar su conjugado armónico v tal que F = u + iv y expresar F en función de z.

Desarrollo

$u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, calculando sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}sen(2xy)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}sen(2xy)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=4x^2e^{x^2-y^2}\cos 2xy-4xe^{x^2-y^2}sen 2xy-4xye^{x^2-y^2}sen 2xy-4y^2e^{x^2-y^2}\cos 2y$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=4y^2e^{x^2-y^2}\cos 2xy+4xye^{x^2-y^2}sen 2xy+4xye^{x^2-y^2}sen 2xy-4x^2e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

Dar un ejemplo que la recíproca del ejercicio (17) no es necesariamente cierta.

Desarrollo

La función $f(z)=\bar{z}$ es continua en z_0, sin embargo por el ejemplo (2) de (3.9) $f(z)=\bar{z}$ no es analítica en ninguna parte, esto indica que una función continua no necesariamente debe ser analítica.

(19) Demostrar que: $\frac{\partial}{\partial z}\ln(f(z))=\frac{f'(z)}{f(z)}$

Desarrollo

Sea w = ln y donde y = f(z), aplicando regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

$\therefore\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{f'(z)}{f(z)}$, w = ln y = ln (f(z))

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

como u(x,y) es armónica, entonces ∃ V / f = u + iv por las ecuaciones de Cauchy – Riemann se tiene: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, de donde:

$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}sen2xy$, integrando

$$v(x,y)=\int[2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}sen2xy]dy+g(x)$$

$v(x,y)=e^{x^2-y^2}sen2xy+g(x)$, derivando respecto a x

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}sen2xy+2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy+g'(x)=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

$$2xe^{x^2-y^2}sen2xy+2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy+g'(x)=2xe^{x^2-y^2}sen2xy+2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

de donde $g'(x)=0$ entonces $g(x)=C$

$v(x,y)=e^{x^2-y^2}sen2xy+c$

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy+ie^{x^2-y^2}sen2xy+ic$$

$$=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\,sen\,2xy)+i=e^{x^2-y^2}e^{(2xy)i}+ic=e^{x^2+2xyi-y^2}+ic$$

$$=e^{(x+iy)^2}+ic=e^{z^2}+ic$$

(21) Determinar si la función $u(x,y)=3x^2y+2x^2-2y^2-y^3$ es armónica, de ser afirmativa, calcular el conjugado armónico V(x,y). Expresar F = u + iv, en función de z.

Desarrollo

u(x,y) es armónica si $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$

como $u(x,y)=3x^2y+2x^2-2y^2-y^3$ entonces

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=6xy+4x\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=6y+4$

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-4y-3y^2\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=4-6y$

$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=6y+4-4-6y=0$

como $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ entonces u(x,y) es armónico

F es analítica si y solo si $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=6xy+4x$, integrando respecto a x:

$v(x,y)=\int(6xy+4x)dy+g(x)=3xy^2+4xy+g(x)$, derivando

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=3y^2+4y+g'(x)=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-(3x^2-4y-3y^2)$$

$g'(x)=-3x^2$ de donde $g(x)=-x^3$

$$\therefore\quad v(x,y)=3xy^2+4xy-x^3$$

$$F(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(3x^2y+2x^2-2y^2-y^3)+i(3xy^2+4xy-x^3)$$

$$=-(x^3+3x^2yi-3xy^2-iy^3)i+(2x^2+4xyi-2y^2)=-(x+iy)^3i+2(x+iy)^2$$

$=-z^3i+2z^2$ $\qquad\therefore\ F(z)=-z^3i+2z^2$

(22) Analizar si la función $u(x,y)=e^{-2xy}sen(x^2-y^2)$ es armónica.

Desarrollo

u(x,y) es armónica si se cumple: $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$

$u(x,y)=e^{-2xy}sen(x^2-y^2)\ \Rightarrow\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)-2y\,sen(x^2-y^2)$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=-4x^2e^{-2xy}sen(x^2-y^2)+e^{-2xy}(2-4xy)\cos(x^2-y^2)-4xye^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$$
$$+4y^2e^{x^2-y^2}sen(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=(y^2-x^2)4e^{-2xy}sen(x^2-y^2)+(2-8xy)e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)\qquad\text{... (1)}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos(x^2-y^2)-2xe^{-2xy}sen(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=-4y^2e^{-2xy}sen(x^2-y^2)+(4xy-2)e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)+4xye^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$$
$$+4x^2e^{-2xy}sen(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=4(x^2-y^2)e^{-2xy}sen(x^2-y^2)+(8xy-2)e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)\qquad\text{... (2)}$$

sumando (1) y (2) se obtiene: $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$

$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=u_x=2-2y$, integrando respecto a y

$$v(x,y)=\int(2-2y)dy+g(x)=2y-y^2+g(x)$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=0+g'(x)=-u_y=-(-2x)=2x$$

$g'(x)=2x$ de donde $g(x)=x^2$

$v(x,y)=2y-y^2+x^2$

sumando (1) y (2) se obtiene: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

por lo tanto $u(x,y)=e^{-2xy}sen(x^2-y^2)$ es armónica

(23) **a)** Probar que $u(x,y)=2x-2xy$ es armónica.

b) Encontrar $V(x,y)$ tal que $F=u+iv$

c) Expresar F en términos de z

Desarrollo

a) $u(x,y)$ es armónica si se cumple $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$

$$u(x,y)=2x-2xy \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2-2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-2x \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

de donde $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 \Rightarrow u(x,y)$ es armónica

b) $F=u+iv$ es analítica y solo si $u_x=v_y$; $u_y=-v_x$

c) $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)=2x-2xy+i(2y-y^2+x^2)$

$$=2(x+iy)+i(x+iy)^2=2z+z^2i \qquad \therefore\ F(z)=2z+iz^2$$

(24) Si $u(x,y)=e^{-x}(x\,sen\,y-y\cos y)$ entonces:

i) Verificar si $u(x,y)$ es armónica.

ii) Hallar el conjugado armónico V tal que $F=u+iv$

iii) Expresar F en función de z.

Desarrollo

i) $u(x,y)$ es armónico si se cumple $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$

$$u(x,y)=e^{-x}(x\,sen\,y-y\cos y) \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=-e^{-x}(x\,sen\,y-y\cos y)+e^{-x}sen\,y$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=e^{-x}(x\,sen\,y-y\cos y)-e^{-x}sen\,y-e^{-x}sen\,y$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=e^{-x}(x\,sen\,y-y\cos y-2\,sen\,y) \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\,sen\,y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=e^{-x}(-x\,sen\,y+sen\,y+sen\,y+y\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=e^{-x}(-x\,sen\,y+y\cos y+2\,sen\,y) \qquad \ldots (2)$$

ahora sumando (1) y (2) se tiene:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 \Rightarrow u(x,y) \text{ es armónica}$$

ii) $\exists$ V tal que $F=u+iv$ es analítica entonces cumple con las ecuaciones de Cauchy Riemann.

$u_x=v_y$ y $u_y=-v_x$ entonces se tiene:

$v_y=u_x=e^{-x}(-x\,sen\,y+y\cos y+sen\,y)$, integrando

$$v(x,y)=\int e^{-x}(-x\,sen\,y+y\cos y+sen\,y)dy+g(x)$$

$v(x,y)=e^{-x}(x\cos y+y\,sen\,y)+g(x)$, derivando

$$v_x=e^{-x}\cos y-e^{-x}(x\cos y+y\,sen\,y)+g'(x)=-u_y$$

$$e^{-x}(\cos y-x\cos y+y\,sen\,y)+g'(x)=e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\,sen\,y)$$

$g'(x)=0$ de donde $g(x)=c$

$$v(x,y)=e^{-x}(x\cos y+y\,sen\,y)+c$$

iii) $F(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)+ic=e^{-x}(x\,sen\,y-y\cos y)+ie^{-x}(x\cos y+y\,sen\,y+ic$

$$=e^{-x}[sen\,y(x+iy)+i\cos y(x+iy)]+ic=e^{-x}[z\,sen\,y+zi\cos y]+ic$$

$$=ze^{-x}(sen\,y+i\cos y)+ic=ize^{-x}(\cos y-i\,sen\,y)+ic$$

$$=ize^{-x}e^{-iy}+ic=ize^{-(x+iy)}+ic=ize^{-z}+ic$$

$\therefore\ F(z)=ize^{-z}+ic$

(25) Si f es una función analítica, demostrar que: $(\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|)^2=\|f'(z)\|^2$

Desarrollo

Sea $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y) \Rightarrow \|f(z)\|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}=\frac{u(x,y)u_x(x,y)+v(x,y)v_x(x,y)}{\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|)^2=\frac{(u(x,y)u_x(x,y)+v(x,y)v_x(x,y))^2}{u^2(x,y)+v^2(x,y)} \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|=\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)})=\frac{u(x,y)u_y(x,y)+v(x,y)v_y(x,y)}{\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}}$$

$$(\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|)^2=\frac{(u(x,y)u_y(x,y)+v(x,y)v_y(x,y))^2}{u^2(x,y)+v^2(x,y)} \qquad \ldots (2)$$

ahora sumamos (1) y (2) es decir:

$$(\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|)^2=$$

$$=\frac{(u(x,y)u_x(x,y)+v(x,y)v_x(x,y))^2+(u(x,y)u_y(x,y)+v(x,y)v_y(x,y))^2}{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

como f es analítica, entonces se cumple las ecuaciones de Cauchy – Riemann:
$u_x(x,y)=v_y(x,y)$; $u_y(x,y)=-v_x(x,y)$

$$(\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|)^2=$$

$$(u(x,y)v_y(x,y)+v(x,y)v_x(x,y))^2+(v(x,y)v_y(x,y)-u(x,y)v_x(x,y))^2$$

(3) Utilice la definición de derivada para evaluar $f'(z_0)$ o para probar que $f'(z_0)$ no existe.

a) $f(z)=z^2$, $z_0=1+i$ **b)** $f(z)=z+2\bar{z}$, $z_0=3i$

$$= \frac{\cdots}{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

$$= \frac{u^2(x,y)v_y^2(x,y)+v^2(x,y)v_x^2(x,y)+v^2(x,y)v_y^2(x,y)+u^2(x,y)v_x^2(x,y)}{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

$$= \frac{u^2(x,y)(v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y))+v^2(x,y)(v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y))}{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

$$= \frac{(u^2(x,y)+v^2(x,y))(v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y))}{u^2(x,y)+v^2(x,y)} = v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y) \qquad \ldots (3)$$

Sabiendo que: $f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y) \Rightarrow \|f'(z)\|=\sqrt{u_x^2(x,y)+v_x^2(x,y)}$

Entonces: $\|f'(z)\|^2=u_x^2(x,y)+v_x^2(x,y)$

Por las ecuaciones de Cauchy – Riemann se tiene:

$u_x(x,y)=v_y(x,y)$, $u_y(x,y)=-v_x(x,y)$ en (3)

$$(\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|)^2=v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)=u_x^2(x,y)+v_x^2(x,y)=\|f'(z)\|^2$$

$$\therefore \quad (\frac{\partial}{\partial x}\|f(z)\|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}\|f(z)\|)^2=\|f'(z)\|^2$$

3.12. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Sea $f(z)=\bar{z}$, pruebe que $f'(i)$ no existe

(2) Sea $f(z)=\|z\|^2$, sostenemos que f es derivable en cero y $f'(0)=0$, pero f no es derivable.

c) $f(z)=\frac{z}{1+z}$, $z_0=2$ d) $f(z)=(\bar{z})^2$, $z_0=2-i$

(4) ¿$G(z)=\|z\|$ es derivable en $z=0$?

(5) Si $F(z)=\frac{1}{z}$, $z\neq 0$, pasar a coordenadas polares y analizar la existencia de $f'(z)$

(6) Si $w=\arccos(z-1)$, $z=\operatorname{senh}(3u+2i)$ y $u=\sqrt{t}$, hallar $\frac{dw}{dt}$

(7) En la función $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$, $\forall z\in C$. Determinar los puntos donde f(z) es derivable (demuestre su respuesta).

(8) Si $\mathrm{Im}(F'(z))=3x^2y+2xy-y^3$, hallar una función analítica $F=u+iv$ si $F(0)=1$ y expresar F en función de z.

(9) ¿Las funciones dadas son derivables en algún punto de C?

a) $f(z)=\|z\|$ b) $f(z)=\bar{z}$ c) $f(z)=e^{z}$

d) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ e) $f(z)=\mathrm{Re}(\bar{z})$

(10) ¿$f(z)=y+xy^2i$ es derivable en algún punto de C?

(11) Halle los puntos del plano complejo C, donde la función $f(z)=\frac{xy+ix}{1+iy}$ es derivable respecto a la variable z.

(12) Si $F: C \longrightarrow C$ / $F=u+iv$, donde u y v tiene derivadas parciales continuas en un abierto D, probar que: $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}=(\overline{\frac{\partial F}{\partial z}})$

(13) Calcular las derivadas de:

a) $f(z)=6z^3+8z^2+iz+10$ b) $f(z)=(z^2-3i)^{-6}$

c) $f(z)=\frac{z^2-9}{iz^3+2z+\pi}$ d) $f(z)=\frac{(z+2)^7}{(z^2+iz+1)^4}$

(14) Hallar el valor de: $f(z)=e^{x^2-y^2}[\cos(2xy)+i\,sen(2xy)]$

(15) Si f(z) es una función regular de z, probar que: $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\|f(z)\|^2=\|f'(z)\|^2$

(16) Un punto $z=re^{i\theta}$ se mueve en el plano de las z siendo r y θ funciones de t. Hallar el valor de la velocidad y la aceleración de el punto para cualquier instante t.

(17) Sean u y v las componentes real e imaginaria de la función f definida por la ecuación $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^2}{z} & ,\ \text{cuando } z\neq 0\\ 0 & ,\ \text{cuando } z=0\end{cases}$. Verificar que las ecuaciones de Cauchy – Riemann se satisfacen en el origen $z=(0,0)$ y demostrar que f(0) no existe.

(18) Pruebe si las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann en el origen, si lo son, pruebe que no son derivables en dicho punto:

a) $f(z)=\begin{cases}\frac{z^5}{\|z\|^4} & ,\ z\neq 0\\ 0 & ,\ z=0\end{cases}$ b) $f(z)=\begin{cases}\frac{(\mathrm{Re}(z^2))^2}{\|z\|^4}+i\frac{\mathrm{Im}(z^4)}{\|z\|^4} & ,\ z\neq 0\\ 0 & ,\ z=0\end{cases}$

(19) Sea $f(z)=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ si $z\neq 0$ y $f(0)=0$ analizar con detalle.

a) Las partes real e imaginaria de f(z) satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann en el origen.

b) ¿$\exists\ f'(0)$?

(20) Dada la función $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^2}{\|z\|^2} & ,\ \text{si } z\neq 0\\ 0 & ,\ \text{si } z=0\end{cases}$ analizar si:

a) f satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (0,0).

b) ¿$\exists\ f'(0)$?

(21) Dada la función compleja f(z) definida por:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{3}}+ix^{\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2} & ,\ \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determinar si las funciones componentes u(x,y), v(x,y) de la función f(z) satisfacen las condiciones de Cauchy – Riemann en el origen.

b) ¿$\exists\ f'(0)$?

(22) Muestre que la función $f(z)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{z^4}} & ,\ z\neq 0\\ 0 & ,\ z=0\end{cases}$ satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en z = 0, pero no tiene derivada en ese punto.

(23) Dada la función f(z) definida por: $f(z)=\begin{cases}\frac{z^4}{\|z\|^2} & ,\ z\neq 0\\ 0 & ,\ z=0\end{cases}$, determinar si:

a) f satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (0,0).

b) ¿$\exists\ f'(0,0)$?

(24) Sea u y v los componentes real e imaginaria de la función f definida por la ecuación $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^3}{\cdot z} & ,\ \text{cuando } z\neq 0\\ 0 & ,\ \text{cuando } z=0\end{cases}$. Verificar que las condiciones de Cauchy – Riemann se satisface en el origen $z=(0,0)$ y demostrar que $f'(0,0)$ no existe.

(25) Dada la función f(z) definida por: $f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^4}{\|z\|^2} & ; z\neq 0\\ 0 & ; z=0\end{cases}$, analizar si f satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en el origen $z=(0,0)$ y averiguar si existe $f'(0,0)$

(26) Analizar si las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (0,0) ¿Son derivables en dicho punto?

a) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+i\dfrac{y^2}{x^2+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(27) Sea $f(z)=e^x(\cos y+i\,sen\,y)$, Pruebe que dicha función satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann

(28) Analizar su la función dada satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (0,0) ¿Es derivable en dicho punto?

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^6+y^3}+i\dfrac{x^4y^2}{x^6+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(29) Pruebe que cada función satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann.

a) f(z) = cos x cosh y – i sen x senh y

b) f(z) sen x cosh y + i cos x senh y

(30) Analizar si la función $f(z)=\|z\|^2$ es analítica.

(31) ¿La función $f(z)=e^{-y}(\cos x+i\,sen\,x)$ es analítica en todo C?

(32) Si $\operatorname{Im}(f'(z))=3x^2y+2xy-y^3$, hallar una función analítica f = u + i v si f(0) = 1 y expresar f en al función de z.

(33) Su $\operatorname{Re}(f'(z))=3x^2-4y-3y^2$ y $f(1+i)=0$, Hallar la función f.

(34) Diga si $f(z)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+i\,arctg(\frac{y}{x})$ es analítica

(35) Demostrar que las siguientes funciones no son analíticas en ningún punto.

a) f(z) = xy + iy

b) $f(z)=e^{y}.e^{ix}$

(36) Comprobar que cada una de las funciones dadas son enteras.

a) f(z) = 3x + y + i(3y – x)

b) f(z) = sen x senh y + i cos x senh y

c) $f(z)=e^{-y}e^{ix}$

d) $f(z)=(z^2-2)e^{-x}e^{-iy}$

(37) Demostrar que la función $f(z)=\|z\|^4$ es derivable en el punto z = 0, pero no es analítica en ese punto.

(38) Si f(z) = u + iv es una función entera y $u^2=v^2$. Demuestre que f es una función constante.

(39) Si f(z) = u + iv es una función entera y $v=u^2$. Demuestre que f es una función constante.

(40) Si f(z) = u + iv y $\overline{f(z)}=u-iv$ son analíticas. Pruebe que f es una función constante.

(41) Sea f(z) = u + iv es una función entera y supongamos que u.v es constante, pruebe que f es una función constante.

(42) Diga si la función f(z) definida por:

$$f(z)=sen(\frac{x}{x^2+y^2})\cosh(\frac{y}{x^2+y^2})-i\cos(\frac{x}{x^2+y^2})senh(\frac{y}{x^2+y^2})$$ es analítica.

(43) Pruebe que las funciones dadas son enteras

a) $f(z)=e^x(\cos y+i\,sen\,y)$

b) f(z) = cos x cosh y – i sen x senh y

c) f(z) = sen x cosh y + i cos x senh y

d) $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

e) $f(z)=sen(x^2-y^2)\cosh(2xy)+i\cos(x^2-y^2)senh(2xy)$

(44) Diga si las siguientes funciones son analíticas

a) $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

b) $f(z)=sen(\frac{x}{x^2+y^2})\cosh(\frac{y}{x^2+y^2})-i\cos(\frac{x}{x^2+y^2})senh(\frac{y}{x^2+y^2})$

(45) Determinar si la función $u(x,y)=3x^2y+2x^2-2y^2-y^3$ es armónica, de ser afirmativo, calcular el conjugado armónico v(x,y) y expresar F = u + iv en función de z.

(46) Si $v(x,y)=e^{-xy}\cos(x^2-y^2)$

a) Verificar que v(x,y) es armónica.

b) Hallar el conjugado armónico u tal que F = u + iv

c) Expresar F en función de z.

(47) Analizar si las siguientes funciones son armónicas, de ser afirmativo, hallar la función conjugado V(x,y) armónico tal que F = u + iv.

a) $u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$

b) $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x sen\,y$

c) $u(x,y)=e^{-2xy}sen(x^2-y^2)$

d) $u(x,y)=e^{e^x\cos y}\cos(e^x sen\,y)$

(48) Analizar si las funciones $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $v(x,y)=e^{\frac{y}{x}}$ son armónicos, en caso de serlo, determinar una función analítica f(z) en términos de z.

(51) Probar que si tanto la parte real como imaginaria de una función analítica tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces estas satisfacen la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

(52) Si $f: C\longrightarrow C$ es una función analítica en la región D y si $\|f(z)\|$ = constante, entonces demostrar que f(z) = constante, $\forall z\in D$

(53) Sea f(z) = u(x,y) + i v(x,y) una función analítica en el dominio D, explicar porque las funciones $u(x,y)=e^{u(x,y)}\cos(v(x,y))$, $v(x,y)=e^{u(x,y)}sen(v(x,y))$ son armónicos en D y porque v(x,y) es de hecho una armónica conjugada de u(x,y).

(54) Hallar la función analítica f en términos de z a partir de $\operatorname{Re}(f''(z))=6xy+3x^2-3y^2$, $f'(1+i)=2i$

(55) Si f(z) es una función regular (analítica u holomorfía), Probar que $\nabla^2\|f(z)\|^2=4\|f'(z)\|^2$, usando este resultado deducir una fórmula para $\nabla^4\|f(z)\|^2$.

(49) Si $u,v: R^2 \to R$ son conjugados armónicos. Probar que: $\partial v = \frac{\partial u}{\partial x}\partial y - \frac{\partial u}{\partial y}\partial x$

(50) Si f(z) y g(z) son armónicos, decir si las funciones f(g(z)), f(z).g(z) y f(z) + g(z) son armónicos justifique su respuesta.

CAPÍTULO IV

4. LAS FUNCIONES TRASCENDENTES BÁSICAS.-

4.1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.-

La función f: D ⊂ C ⟶ C, definida por $f(z)=\exp(z)=e^z$ se llama función exponencial en z.

Si z = x + iy entonces $f(z)=e^z=e^{x+iy}$

cuando y = 0, entonces $f(z)=e^x$ se reduce a la exponencial real

cuando x = 0, entonces $f(z)=e^{iy}=\cos y+i\,\text{sen}\,y$, se obtiene la fórmula de Euler

4.2. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.-

(1) La función exponencial $f(z)=e^z$ es analítica en todo C

Demostración

$$f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)$$

$$\boxed{f(z)=e^x\cos y+ie^x\,\text{sen}y}$$, de donde

$u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\,\text{sen}\,y$, son continuas en R^2

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, & \frac{\partial u}{\partial y}=e^x\,\text{sen}\,y\\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\,\text{sen}\,y, & \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y\end{cases}$$

estas funciones son continuas en todo R^2

como $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ y $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$, $\forall(x,y)\in R^2$

entonces $f(z)=e^z$ es analítica en todo C, además:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\,\text{sen}\,y=e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y)=e^x.e^{iy}=e^{x+iy}=e^z$$

$\therefore\ f'(z)=e^z$

(2) $$e^{iy}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Demostración

Sabemos que: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, ∀ x ∈ R

$$e^{iy}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}=1+\frac{iy}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{5!}-\frac{y^6}{6!}-\frac{iy^7}{7!}+\dots$$

$$e^{iy}=(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\dots)+i(y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\dots)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos y+i\,\text{sen}\,y$$

$\therefore\ \boxed{e^{iy}=\cos y+i\,\text{sen}\,y}$

$$e^{-iy}=e^{i(-y)}=\cos(-y)+i\,\text{sen}(-y)=\cos y-i\,\text{sen}\,y$$

$$\boxed{e^{-iy}=\cos y-i\,\text{sen}\,y}$$

(3) $\|e^z\|>0$, ∀ z ∈ C

Demostración

$$e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)$$

$$\|e^z\|=e^x\sqrt{\cos^2 y+\text{sen}^2 y}=e^x=e^{\text{Re}(z)}>0,\ \forall x\in R$$

$\therefore\ \|e^z\|>0$, ∀ z ∈ C

(4) $\forall z_1,z_2\in C;\ e^{z_1}.e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

Demostración

$$e^{z_1}=e^{x_1+iy_1}=e^{x_1}.e^{iy_1}=e^{x_1}(\cos y_1+i\,\text{sen}y_1)$$

$$e^{z_2}=e^{x_2+iy_2}=e^{x_2}.e^{iy_2}=e^{x_2}(\cos y_2+i\,\text{sen}y_2)$$

$$e^{z_1}.e^{z_2}=e^{x_1}.e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\,\text{sen}(y_1+y_2)]$$

$$=e^{x_1+x_2}.e^{i(y_1+y_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2}$$

$\therefore\ e^{z_1}.e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

(5) $\forall z_1,z_2\in C,\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2},\ \frac{1}{e^z}=e^{-z},\ \forall z\in C$

Demostración

$$\frac{1}{e^z}=\frac{1}{e^x.e^{iy}}=\frac{e^{-x}}{\cos y+i\,\text{sen}y}=e^{-x}(\cos y-i\,\text{sen}y)=e^{-x}.e^{-iy}=e^{-(x+iy)}=e^{-z}$$

$\therefore\ \frac{1}{e^z}=e^{-z}$, ∀ z ∈ C

(7) $(e^z)^{\frac{m}{n}}=[e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y)]^{\frac{m}{n}}$, ∀ k = 0,1,2,..., n − 1

Demostración

$$(e^z)^{\frac{m}{n}}=[e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)]^{\frac{m}{n}}=[e^{\frac{x}{n}}(\cos y+i\,\text{sen}y)^{\frac{1}{n}}]^m$$

$$=[e^{\frac{x}{n}}(\cos\frac{y+2k\pi}{n}+i\,\text{sen}\frac{y+2k\pi}{n})]^m$$

$$=e^{\frac{m}{n}x}[\cos\frac{m}{n}(y+2k\pi)+i\,\text{sen}\frac{m}{n}(y+2k\pi)]$$

$$=e^{\frac{m}{n}x+i\frac{m}{n}(y+2k\pi)}=e^{\frac{m}{n}x+i\frac{m}{n}(y+2k\pi)}=e^{\frac{m}{n}[(x+iy)+2k\pi i]}=e^{\frac{m}{n}(z+2k\pi i)}$$

$\therefore\ (e^z)^{\frac{m}{n}}=e^{\frac{m}{n}(z+2k\pi i)}$, ∀ k = 0,1,2,...,n − 1

(8) $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$, ∀ z ∈ C

Demostración

$$e^{\bar{z}}=e^{x-iy}=e^x.e^{-iy}=e^x(\cos y-i\,\text{sen}\,y)$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1}\cdot\frac{1}{e^{z_2}} = e^{z_1}e^{-z_2} = e^{z_1-z_2} \qquad \therefore\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

(6) $(e^z)^n = e^{nz}$, $\forall z \in C,\ n \in Z^+$

Demostración

$$(e^z)^n = [e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)]^n = e^{nx}[\cos ny + i\,\text{sen}\,ny] = e^{nx}[e^{niy}] = e^{n(x+iy)} = e^{nz}$$

$\therefore\ (e^z)^n = e^{nz}$

$$= e^x\cos y - ie^x\,\text{sen}\,y = e^x\cos y + ie^x\,\text{sen}\,y = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

4.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O FUNCIONES CIRCULARES COMPLEJAS.-

Se conoce que: $\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen}\,y & \ldots(1) \\ e^{-iy} = \cos y - i\,\text{sen}\,y & \ldots(2) \end{cases}$

sumando (1) y (2) se tiene: $e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y$

de donde: $\boxed{\cos y = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}}$

al restar (1) y (2) se tiene: $e^{iy} - e^{-iy} = 2i\,\text{sen}\,y$

de donde $\boxed{\text{sen}\,y = \dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}}$

a) **DEFINICIÓN.-** $\forall z \in C,\ z = x + iy$, definimos las funciones

$$\boxed{\text{sen}z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$$

que son analíticas $\forall z \in C$

como son analíticas $\forall z \in C$ estas funciones son enteras y además satisfacen.

$$(\text{sen}z)' = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$\therefore\ \boxed{(\text{sen}z)' = \cos z}$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = i\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}\right) = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\text{sen}z$$

$\therefore\ \boxed{(\cos z)' = -\text{sen}z}$

Las otra cuatro funciones trigonométricas son definidas en términos de las funciones sen z y cos z por medio de las relaciones usuales.

$tgz = \dfrac{\text{sen}z}{\cos z}$, $ctgz = \dfrac{\cos z}{\text{sen}z}$, $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$, $\cos ecz = \dfrac{1}{\text{sen}z}$ estas funciones son analíticas, excepto donde se anulan sus denominadores, además satisfacen la regla de la derivación.

$(tg\,z)' = \sec^2 z$	$(c\,tg\,z)' = -\cos ec^2 z$
$(\sec z)' = \sec z.\,tg\,z$	$(\cos ecz)' = -c\,tg\,z.\cos ecz$

De la definición de cos z, se tiene:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}] = \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i\,\text{sen}\,x) + e^{y}(\cos x - i\,\text{sen}\,x)]$$

$$= \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\,\text{sen}\,x = \cosh y.\cos x - i\,\text{senh}\,y.\,\text{sen}\,x$$

$\therefore\ \boxed{\cos z = \cosh x.\cos x - i\,\text{senh}\,y.\,\text{sen}\,x}$

en forma similar es para sen z

$$\text{sen}\,z = \text{sen}(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y-ix}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}[e^{-y}(\cos x + i\,\text{sen}\,x) - e^{y}(\cos x - i\,\text{sen}\,x)]$$

$$= \frac{e^y+e^{-y}}{2}\,\text{sen}\,x + i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x = \cosh y.\,\text{sen}\,x + i\,\text{senh}\,y.\cos x$$

$\therefore\ \boxed{\text{sen}\,z = \cosh y.\,\text{sen}\,x + i\,\text{senh}\,y.\cos x}$

Ejemplo.- Calcular $\|\text{sen}\,z\|$

Desarrollo

Sea $f(z) = \text{sen}\,z = \cosh y.\,\text{sen}\,x + i\,\text{senh}\,y.\cos x$

$$\|\text{sen}\,z\| = \sqrt{\cosh^2 y\,\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y.\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{(1+\text{senh}^2 y)\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y(1-\text{sen}^2 x)} = \sqrt{\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y}$$

Ejemplo.- Probar que $\cos\bar{z} = \overline{\cos z}$

Desarrollo

$$\cos\bar{z} = \cos(x-iy) = \frac{e^{i(x-iy)}+e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{y}(\cos x + i\,\text{sen}\,x) + e^{-y}(\cos x - i\,\text{sen}\,x)}{2}$$

$$= \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x + i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\,\text{sen}\,x$$

$$= \cosh y.\cos x + i\,\text{senh}\,y.\,\text{sen}\,x = \overline{\cosh y.\cos x - i\,\text{senh}\,y.\text{sen}\,x} = \overline{\cos z}$$

$\therefore\ \cos\bar{z} = \overline{\cos z}$

4.4. FUNCIONES HIPERBÓLICAS COMPLEJAS.-

$\forall z \in C,\ z = x + iy$, definimos las funciones

$$\boxed{\text{senh}z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}}$$

que son funciones analíticas $\forall z \in C$

Luego las funciones hiperbólicas complejas están relacionadas con las funciones trigonométricas complejas, puesto que al multiplicar por i simplemente se rota todo vector en C por 90° en sentido antihorario.

OBSERVACIÓN.- Las identidades y las reglas usuales de la derivación se aplican a las funciones hiperbólicas complejas.

(1) $F(z) = \text{senh}\,z$ entonces $F'(z) = \cosh z$

(2) $F(z) = \cosh z$ entonces $F'(z) = \text{senh}z$

(3) $F(z) = tgh\,z$ entonces $F'(z) = \text{sec}h^2 z$

(4) $F(z) = ctgh\,z$ entonces $F'(z) = -\cos ech^2 z$

(5) $F(z) = \text{sech}\,z$ entonces $F'(z) = -\sec hz\,tghz$

(6) $F(z) = \text{cosech}\,z$ entonces $F'(z) = -\cos echz\,ctghz$

Las otras funciones hiperbólicas son definidas en términos de senh z y cosh z por medio de las relaciones usuales.

$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$, $\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$, son funciones analíticas $\forall z \in C$ tal que $\cosh z \neq 0$

$c\operatorname{tgh} z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$, $\operatorname{cosech} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}$, son funciones analíticas

$\forall z \in C$ tal que $\operatorname{senh} z \neq 0$, observemos lo siguiente:

$$\operatorname{senh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{\cos z + i \operatorname{sen} z}{2} - \frac{\cos z - i \operatorname{sen} z}{2} = \frac{2i \operatorname{sen} z}{2} = i \operatorname{sen} z$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z}$$

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{\cos z + i \operatorname{sen} z + \cos z - i \operatorname{sen} z}{2} = \frac{2\cos z}{2} = \cos z$$

$$\therefore \boxed{\cosh iz = \cos z}$$

4.5. LA FUNCIÓN LOGARITMO Y SUS RAMAS.-

Sea $z \in C$, $z \neq 0$. Si $z = e^w$, entonces definimos w como el logaritmo natural de z que denotaremos por $\log z = w$, conociendo z podemos determinar w, número finito de valores correspondientes para w.

Ahora escribimos $w = u + iv$, $z = x + iy$, de donde

$z = x + iy = \|z\| e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (o $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Luego entonces se tiene:

$z = e^w \Leftrightarrow r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v)$

$e^u = r \wedge \cos v = \cos\theta \wedge \operatorname{sen} v = \operatorname{sen}\theta$

$\ln e^u = \ln r \wedge v = \theta + 2k\pi,\ k \in z$

$u \ln e = \ln r \wedge v = \theta + 2k\pi,\ k \in z$

Luego $u = \ln r = \ln \|z\| \wedge v = \theta + 2k\pi,\ k \in z$

Como $\log z = w = u + iv = \ln r + (\theta + 2k\pi)i,\ k \in z$

$$\boxed{\log z = \ln r + (\theta + 2k\pi)i,\ k \in z}$$

a) **DEFINICIÓN.-** $\forall z \in C$, $z \neq 0$, definimos la función logaritmo en la forma siguiente:

$\boxed{\log z = \ln \|z\| + i(\theta + 2k\pi),\ k \in z}$, donde $\theta = \arg(z)$

La función log es multivaluada (tiene infinidad de valores). Si $k = 0$ entonces

$$\boxed{\log z = \ln \|z\| + i\theta}$$

Se llama valor o rama principal del logaritmo de z

OBSERVACIÓN.-

① Si $z = \|z\| e^{i\theta} \Rightarrow \ln z = \ln \|z\| + \ln e^{i\theta}$

$$\boxed{\ln z = \ln \|z\| + i\theta}$$

② Si $f(z) = w = \ln z$

$e^w = e^{\ln z} = e^{\ln\|z\| + i\theta} = e^{\ln\|z\|} e^{i\theta} = \|z\| e^{i\theta} = z$ $\therefore\ e^{\ln z} = z$

4.6. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA.-

Consideremos $z, w \in C$ una constante compleja

① $\ln(zw) = \ln z + \ln w$ ② $\ln(\frac{z}{w}) = \ln z - \ln w$

③ $\ln z^n = n \ln z$ ④ $z^C = e^{C \ln z}$, C constante compleja.

Demostración

① Sea $z = \|z\| e^{i\theta_1}$, $w = \|w\| e^{i\theta_2}$, entonces:

$zw = \|z\| \|w\| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, tomando logaritmo $\ln zw = \ln \|z\| \|w\| + i\theta_1 + i\theta_2$

$\ln zw = [\ln \|z\| + i\theta_1] + [\ln \|w\| + i\theta_2] = \ln z + \ln w$

$\therefore\ \ln zw = \ln z + \ln w$

② Sea $z = \|z\| e^{i\theta_1}$, $w = \|w\| e^{i\theta_2}$, entonces:

$\frac{z}{w} = \frac{\|z\| e^{i\theta_1}}{\|w\| e^{i\theta_2}} = \frac{\|z\|}{\|w\|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$, tomando logaritmo

$\ln(\frac{z}{w}) = \ln \frac{\|z\|}{\|w\|} + i(\theta_1 - \theta_2) = [\ln \|z\| + i\theta_1] - [\ln \|w\| + i\theta_2] = \ln z - \ln w$

$\therefore\ \ln(\frac{z}{w}) = \ln z - \ln w$

③ Sea $z = \|z\| e^{i\theta}$ entonces $z^n = \|z\|^n e^{in\theta}$

$\ln z^n = \ln \|z\|^n + in\theta = n \ln \|z\| + in\theta = n(\ln \|z\| + i\theta) = n \ln z$

$\therefore\ \ln z^n = n \ln z$

Ejemplos.-

1) Calcular $\ln(1 + i\sqrt{3})$

Desarrollo

$\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln \|1 + i\sqrt{3}\| + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in z$, donde

$\theta = arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, por lo tanto:

$\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln \|1 + i\sqrt{3}\| + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in z = \ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $\forall k \in z$

(tiene infinitos resultados por que $k = 0, 1, 2, \ldots$)

El valor principal de $\ln(1 + \sqrt{3})$ es: $\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3}$, cuando $k = 0$

2) Calcular $\ln z$ donde $z = 1 + i0$

Desarrollo

$\theta = \arg(z) = arctg(\frac{0}{1}) = 0°$ y $\|z\| = r = 1$

$\ln z = \ln \|z\| + i(\theta + 2k\pi)$

$\ln 1 = \underset{0}{\underline{\ln 1}} + 2k\pi i \Rightarrow \ln 1 = 2k\pi i$, el valor principal de $\ln z$ es: $\ln 1 = 0$ para $k = 0$

3) Calcular $\ln i$

$zw = -1 \Rightarrow \ln zw = \ln \|-1\| + (\pi + 2k\pi)i,\ k \in z$

$\ln zw = i(\pi + 2\pi)$ ... (2)

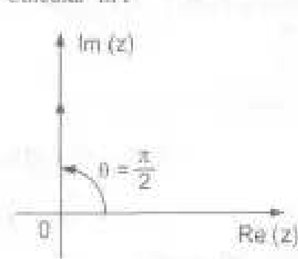
al comparar (1) y (2) observamos que: $\ln zw \neq \ln z + \ln w,\ \forall k \neq 0$

4.7. TEOREMA.-

Sean $z, w \in C$, $z \neq 0$, $w \neq 0$, $\theta = \arg z$, $\varphi = \arg(w)$ entonces:

① $\ln zw = \begin{cases} \ln z + \ln w - 2\pi i & ,\ \pi < \theta + \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

3) Calcular ln i



Desarrollo

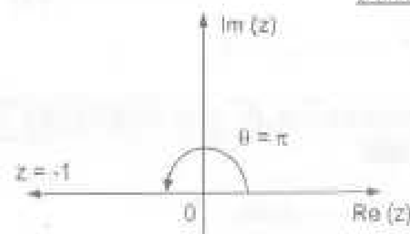
$\ln i = \ln \| i \| + i(\theta + 2k\pi)$

$\ln i = \underbrace{\ln 1}_{0} + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow \ln i = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $\forall$ k $\in z$

el valor principal $\ln i = \frac{\pi}{2} i$ cuando k = 0

4) Calcular ln (-1)

Desarrollo



$\ln(-1) = \ln \| -1 \| + i(\theta + 2k\pi)$

$\ln(-1) = \underbrace{\ln \| -1 \|}_{0} + i(\theta + 2k\pi)$

$\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, $\forall$ k $\in$ z

el valor principal es: $\ln(-1) = \pi i$

OBSERVACIÓN.- El logaritmo de un número negativo no existe en los números reales, pero sí existe en los números complejos.

5) ¿Si z = 1 y w = -1 se cumple ln zw = ln z + ln w?

Desarrollo

$\ln z = 2k\pi i$, $\ln w = \pi(1 + 2k)i$, k $\in$ z

$\ln z + \ln w = \pi(1 + 4k)i$ ... (1)

① $\ln zw = \begin{cases} \ln z + \ln w & , -\pi < \theta + \varphi \le \pi \\ \ln z + \ln w + 2\pi i & , -2\pi < \theta + \varphi \le -\pi \end{cases}$

② $\ln(\frac{z}{w}) = \begin{cases} \ln z - \ln w - 2\pi i & , \pi < \theta - \varphi \le 2\pi \\ \ln z - \ln w & , -\pi < \theta - \varphi \le \pi \\ \ln z - \ln w + 2\pi i & , -2\pi < \theta - \varphi \le \pi \end{cases}$

③ $\ln z^m = m \ln z - 2k\pi i$, m $\in$ z y k es el único entero $\frac{m}{2\pi}\theta - \frac{1}{2} \le k < (\frac{m}{2\pi})\theta + \frac{1}{2}$

4.8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.-

Si z = sen w, entonces w = arcsen z se llama función inversa de la función seno de z o arcsen de z y en forma análoga se define las demás funciones trigonométricas inversas arccos z, arctg z, arcctg z, arcsec z y arccosec z, estas funciones son multivaluadas y pueden ser representadas en función de la función logaritmo natural donde se omite la constante aditiva 2kπi, entonces:

① $\text{arcsen}\, z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

② $\arccos z = \frac{1}{i}\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

③ $\text{arctg}\, z = \frac{1}{2i}\ln(\frac{1 + iz}{1 - iz})$

④ $\text{arcctg}\, z = \frac{1}{2i}\ln(\frac{z + i}{z - i})$

⑤ $\text{arcsen}\, z = \frac{1}{i}\ln(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z})$

⑥ $\text{arccosec}\, z = \frac{1}{i}\ln(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z})$

Demostración

① Probaremos que: $\text{arcsen}\, z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

sea w = arcsen z, aplicando la función sen

sen w = sen(arsen z) = (sen (arcsen))(z) = z

$z = \text{sen}\, w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) \Rightarrow 2iz = e^{iw} - e^{-iw}$

de donde $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$

$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{(2iz)^2 + 4}}{2} = \frac{2iz \pm 2\sqrt{1 - z^2}}{2}$

$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$, tomando logaritmo

$\ln e^{iw} = \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \Rightarrow iw \ln e = \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

de donde $w = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ $\therefore$ $\text{arcsen}\, z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

③ Probaremos que: $\text{arctg}\, z = \frac{1}{2i}\ln(\frac{1 + iz}{1 - iz})$

Sea w = arctg z $\Rightarrow$ tg w = z, entonces

$z = \text{tg}\, w = \frac{\text{sen}\, w}{\cos w} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})}{\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$

$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw} \Rightarrow iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$

de donde $(1 - iz)e^{2iw} - iz - 1 = 0 \Rightarrow e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$

$\ln e^{2iw} = \ln(\frac{1 + iz}{1 - iz})$, de donde: $2iw = \ln(\frac{1 + iz}{1 - iz})$, entonces $w = \frac{1}{2i}\ln(\frac{1 + iz}{1 - iz})$

$\therefore$ $\text{arctg}\, z = \frac{1}{wi}\ln(\frac{1 + iz}{1 - iz})$

4.9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS.-

Sea z = senh w, entonces w = arcsenh z se llama función hiperbólica inversa de z, esta función es multievaluada, análogamente se define las funciones w = arccosh z, w = arctgh z, w = arcctgh z, w = arcsech z, w = arccosech z.

Estas funciones pueden ser representadas en términos de la función logaritmo natural.

① $\text{arcsen}\, hz = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$

② $\arccos hz = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

③ $\text{arctg}\, hz = \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + z}{1 - z})$

④ $\text{arcctgh} = \frac{1}{2}\ln(\frac{z + 1}{z - 1})$

⑤ $\text{arcsec}\, hz = \ln(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z})$

⑥ $\text{arccosech}z = \ln(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z})$

Demostración

① Probaremos que: $\text{arcsen}\, hz = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$

sea w = arcsenh z entonces senh w = z de donde

$z = \text{senh}\, w = \frac{1}{2}(e^{w} - e^{-w})$, entonces $2z = e^{w} - e^{-w}$

$e^{2w} - 2ze^{w} - 1 = 0$, de donde $e^{w} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 + 4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$

$\ln e^{w} = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1})$ entonces $w = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$

$\therefore$ $\text{arcsen}\, hz = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$

③ Probaremos que: $\text{arctg}\, hz = \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + z}{1 - z})$

⑨ Expresar cada número en la forma a + bi

Sea $w = \operatorname{arctgh} z \Rightarrow z = \operatorname{tgh} w = \frac{\operatorname{senh} w}{\cosh w}$ de donde

$$z = tgw = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} \Rightarrow z(e^w + e^{-w}) = e^w - e^{-w}$$

$$z(e^{2w} + 1) = e^{2w} - 1 \Rightarrow (1-z)e^{2w} = 1 + z$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z} \text{ entonces } \ln e^{2w} = \ln(\frac{1+z}{1-z})$$

$$2w = \ln(\frac{1+z}{1-z}) \text{ entonces } w = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+z}{1-z}) \quad \therefore \quad \operatorname{arctg} hz = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+z}{1-z})$$

4.10. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Pruebe que: $e^{2+3\pi i} = -e^2$

2. Pruebe que: $e^{\frac{2+\pi i}{4}} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

3. Pruebe que: $e^{2+\pi i} = -e^2$

4. Demuestre que: $\| e^{z^2} \| \le e^{\|z\|^2}$

5. Expresar $\| e^{2z+i} + e^{iz^2} \|$ en términos de x e y. Probar entonces que: $\| e^{2z+i} + e^{iz^2} \| \le e^{2x} + e^{-2xy}$

6. Demostrar que $\| e^{-2z} \| < 1$ si y solo si $Re(z) > 0$

7. Sea z cualquier número complejo no nulo. Demostrar que: si $z = re^{i\theta}$, entonces $e^{(\ln r + i\theta)} = z$

8. Probar que: $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$ si y solo si $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a) $e^{\ldots}$ b) $e^{\ldots}$ c) $e^{\ldots}$

10. Expresar cada número en la forma $a + bi$

a) $e^{\frac{3\pi}{2}}$ b) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ c) $e^{\frac{7\pi i}{2}}$

11. Encuentre todos los números complejos z que satisface las condiciones dada

a) $e^{2z} = 1$ b) $e^{iz} = z$ c) $e^{iz} = -1$

12. Resuelva la ecuación $e^z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

13. Resuelve la ecuación $e^{z^4} = 1$

14. Pruebe que: $\cos(\bar{iz}) = \overline{\cos(iz)}$, $\forall z$

15. Probar $sen(\bar{iz}) = \overline{sen(iz)}$ si y solo si $z = \pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

16. Muestre que: $\overline{sen z} = sen \bar{z}$

17. Pruebe las identidades:

a) $\| sen z \|^2 = sen^2 x + senh^2 y$ b) $\| \cos z \|^2 = \cos^2 x + senh^2 y$

18. Pruebe las identidades:

a) $sen(z_1 \pm z_2) = sen z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 sen z_2$

b) $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + sen z_1 sen z_2$

c) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$ d) $\cos 2z = \cos^2 z - sen^2 z$

19. Expresar cada número en la forma $x + iy$

a) sen i b) cos (-i) c) cos (1 + i) d) tg 2i

20. Encuentre todos los números complejos z que cumplan las condiciones dada:

a) $\cos z = \operatorname{sen} z$ b) $\cos z = -i \operatorname{sen} z$

21. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\cos z = 2$ b) $\operatorname{sen} z = 1 + i$ c) $\operatorname{sen}(\cos z) = 0$

22. Pruebe las reglas de la derivación de:

a) $(tg\, z)' = \sec^2 z$ b) $(ctg\, z)' = -\operatorname{cosec}^2 z$

c) $(\sec z)' = \sec z . tg\, z$ d) $(\operatorname{cosec} z)' = -ctg\, z . \operatorname{cosec} z$

23. Comprobar que: $\operatorname{tgh}(z + \pi i) = \operatorname{tgh} z$

24. Compruebe que:

a) $\operatorname{sen} h(z + \pi i) = -\operatorname{senh} z$ b) $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$

25. Sea $z = x + iy$, pruebe que: $\| \operatorname{senh} y \| \le \| \operatorname{sen} z \| \le \| \cosh y \|$

26. Demostrar que:

a) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$ b) $\cos(iz) = \cosh z$ c) $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{tgh} z$

27. Pruebe las identidades:

a) $\cosh^2 z - senh^2 z = 1$ b) $\cosh(-z) = \cosh z$ c) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$

28. Pruebe las identidades:

a) $sen(z_1 + z_2) = senh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 senh z_2$

b) $\cos(z_1 + z_2) = \cosh z_1 . \cosh z_2 + senh z_1 . senh z_2$

29. Demostrar que:

a) $\| senh z \|^2 = senh^2 x + sen^2 y$ b) $\| \cosh z \|^2 = senh^2 x + \cos^2 y$

30. Verificar que:

a) $tg\, z = \frac{sen(2x) + isenh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$ b) $ctg\, z = \frac{sen(2x) + isenh(2y)}{\cosh 2y - \cos 2x}$

31. Pruebe que: $\| \cos z \| = \sqrt{senh^2 y + \cos^2 x}$

32. Mostrar que: $\| sen z \|^2 + \| \cos z \|^2 = senh^2 y + \cosh^2 y$

33. Demostrar que: $\| senh z \|^2 = senh^2 x + sen^2 y$

34. Demostrar que: $\| \cosh z \|^2 = senh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - sen^2 y$

35. Exprese cada número en la forma $x + iy$

a) cosh (1 + i) b) senh (πi) c) senh (1 + πi) d) $\cosh(\frac{\pi i}{4})$

36. Encuentre todos los números complejos z que cumplen las condiciones dadas.

a) $\cosh z = 2$ b) $\cosh z = i$ c) $senh z = i\sqrt{3}$

d) $senh^2 z = i$ e) $\operatorname{senh}(\cos z) = 0$ f) $\operatorname{arccosh} z = 3 + 4i$

37. Pruebe las reglas de derivación de:

a) $(senh z)' = \cosh z$ b) $(\cosh z)' = senh z$

c) $(tgh\, z)' = \sec h^2 z$ d) $(ctgh\, z)' = -\cos ech^2 z$

e) $(\sec h\, z)' = -\sec h\, z\, tgh\, z$ f) $(\cos ech\, z)' = -\cos ech\, z . ctg\, z$

38. Pruebe que:

a) $(arcsenh z)' = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $z \ne \pm 1$ b) $(\arccos z)' = -(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $z \ne \pm 1$

c) $(arctg\, z)' = \frac{1}{1 + z^2}$, $z \ne \pm i$

(39) Pruebe que:

a) $(arcsenh\, z)' = (1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $z \neq \pm i$ b) $(arccos h\, z)' = (z^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $z \neq \pm 1$

c) $(arctgh\, z)' = \frac{1}{1-z^2}$, $z \neq \pm 1$

(40) Probar que:

a) $\log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$ b) $\log(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$

(41) Comprobar que si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a) $\log e = 1 + 2n\pi i$ b) $\log i = (2n + \frac{1}{2})\pi i$

(42) Comprobar si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\log(-1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi i$

(43) Pruebe que: $\log z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\, arctg \frac{y}{x}$

(44) Evalué $tg(\frac{1}{i}\log[(\frac{1+iz}{1-iz})^{\frac{1}{2}}])$

(45) Calcular: a) $\ln i$ b) $\ln(\frac{1+i}{\sqrt{3}})$

c) $\ln(2-3i)$ d) $\ln(-2+3i)$

(46) Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\arccos z = i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$ b) $arcsen\, z = -i\ln i(z+\sqrt{z^2-1})$

c) $arctg\, z = \frac{i}{2}\ln(\frac{z-i}{z+i})$, $z \neq \pm i$

(47) Demostrar las siguientes igualdades:

a) $arcsenh\, z = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$ b) $arccos h\, z = \ln(z+\sqrt{z^2-1})$

c) $arctgh\, z = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+z}{1-z})$ d) $arcctgh\, z = \frac{1}{2}\ln(\frac{z+1}{z-1})$

(48) Pruebe que: $arctgh(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\log(i\, ctg\frac{\theta}{2})$

(49) Si $z = x + iy$, demuestre que en todas partes donde el denominador no sea nulo:
$$tg\, z = \frac{sen\, x \cos x}{\cos^2 x + senh^2 y} + i\frac{senh\, y \cosh y}{\cos^2 x + senh^2 y}$$

(50) Si $z = x + iy$, demuestre que en todas partes donde el denominador no sea nulo:
$$tg\, z = \frac{senh\, x \cosh x}{senh^2 x + \cos^2 y} + i\frac{sen\, y \cos y}{senh^2 x + \cos^2 y}$$

CAPÍTULO V

5. INTEGRACIÓN COMPLEJA.-

Las integrales son muy importantes en el estudio de las funciones de una Variable Compleja. La Teoría de Integración que desarrollaremos es notable por su elegancia matemática, los teoremas son en general concisos y potentes en donde sus demostraciones son muy sencillas y además por las múltiples aplicaciones en matemática aplicada.

La integración compleja es una de las teorías de la matemática en la que se trabaja con tanto entusiasmo debido a su accesibilidad, existiendo por lo menos dos razones esenciales.

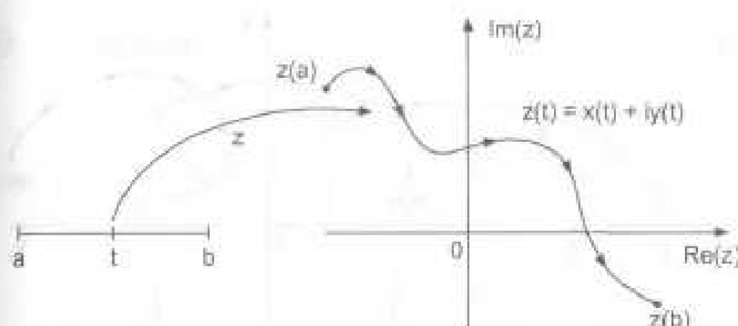
1ro. Dentro de las aplicaciones se encuentran las integrales reales que pueden evaluarse por integración compleja cuando no se tiene éxito con los métodos usuales del cálculo integral real.

2do. Algunas de las propiedades básicas de las funciones analíticas tales como la existencia de derivadas de orden superior no pueden demostrarse por otros métodos, en tales casos se utiliza la integral, este hecho marca las diferencias básicas entre el cálculo real y el complejo.

5.1. CURVAS EN EL PLANO COMPLEJO.-

Una curva γ en el plano complejo $C = R\times R$, es el conjunto de puntos (x,y) tal que:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ \ldots \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$



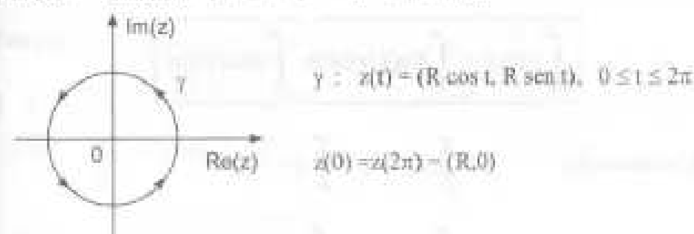
OBSERVACIONES.-

(1) El punto $z(a)$ se denomina punto inicial de la curva γ y el punto $z(b)$ se denomina punto final de la curva γ.

(2) También a $z(a)$ y $z(b)$ se le llaman extremos de la curva γ.

(3) Si $z(a) = z(b)$ se dice que la curva es cerrada.

Ejemplo.- La curva $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$ es cerrada



(4) La dirección positiva de la curva γ, corresponde a los valores crecientes del parámetro t.

(5) Como $x(t)$, $y(t)$ son continuas en $[a,b]$ y también supondremos que

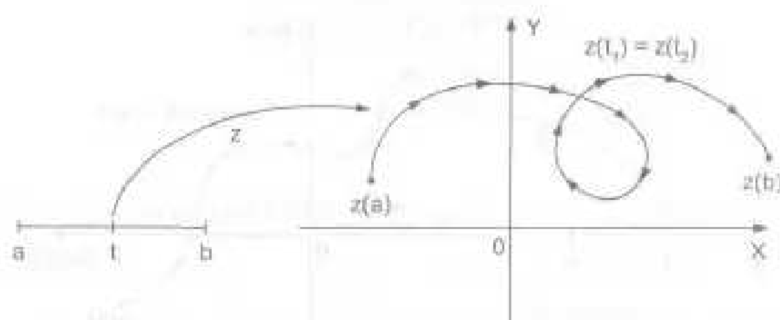
$y = y(t)$

donde x, y: [a,b] ⟶ R son funciones continuas de la variable t en el intervalo [a,b]. como $z = x + iy$, entonces a la curva γ se puede expresar en la forma:

$$\gamma: z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad a \le t \le b$$

$\exists\ z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ en [a,b] y $z'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in [a,b]$ entonces la curva γ se llama curva suave.

(6) Si $t_1, t_2 \in \langle a,b \rangle$, con $t_1 \neq t_2$, $t_1 < t_2$ y $z(t_1) = z(t_2)$, entonces la curva γ se intercepta así mismo (o γ tiene punto doble).



(7) Curva simple es una curva que no tiene punto doble, también es llamado curva de JORDAN.

5.2. DEFINICIÓN.-

Consideremos una función compleja f: [a,b] ⟶ C, tal que:

$$f(t) = \text{Re}(f(t)) + i\,\text{Im}(f(t))$$

entonces definimos a la integral en la forma:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \text{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \text{Im}(f(t))dt$$

de aquí se tiene que: $\text{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \text{Re}(f(t))dt$

$$\text{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \text{Im}(f(t))dt$$

Ejemplos.-

(1) Sea f: [0,1] ⟶ C tal que $f(t) = t^4 + i(t^2+1)$ calcular $\int_0^1 f(t)dt$

Desarrollo

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^4 dt + i\int_0^1 (t^2+1)dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{3}i \in C$$

(2) Sea f: [0,2π] ⟶ C tal que $f(t) = \cos^3 t + i\,sen^3 t$ calcular $\int_0^{2\pi} f(t)dt$

Desarrollo

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt + i\int_0^{2\pi} sen^3 t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - sen^2 t)\cos t\,dt + i\int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)sen\,t\,dt$$

$$= \left(sen\,t - \frac{sen^3 t}{3}\right)\Big/_0^{2\pi} + i\left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big/_0^{2\pi} = 0$$

5.3. DEFINICIÓN.-

Sea $z: [\alpha,\beta] \to R^2$ una función continua tal que $\gamma = \{z(t) / \alpha \le t \le \beta\}$ es una curva, se dice que la curva γ es diferenciable (γ es una curva suave o regular o que no presenta picos) es decir γ es diferenciable si $z'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in [\alpha,\beta]$

Ejemplos.-

(1) La curva $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$ es diferenciable, pues γ: $z(t) = R\cos t + i R\,sen\,t$, $0 \le t \le 2\pi$, entonces: $z'(t) = -R\,sen\,t + iR\cos t$, $\forall\, t \in [0,2\pi]$

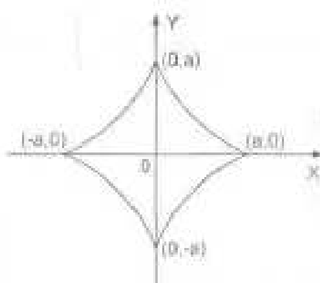
Si $t = 0$, $z'(0) = (0,R) \neq (0,0)$

$t = \frac{\pi}{4}$, $z(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}) \neq (0,0)$

$t = 2\pi$, $z(2\pi) = (0,R) \neq (0,0)$

(2) ¿$\gamma: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ es diferenciable?

Desarrollo



No es diferenciable, pues en los puntos (a,0), (-a,0), (0,a), (0,-a) no existe la derivada.

5.4. DEFINICIÓN.-

Sea $\gamma = \{z(t) / \alpha \le t \le \beta\}$ una curva, entonces diremos que la curva γ es rectificable si su longitud de arco L_γ existe, es decir la integral

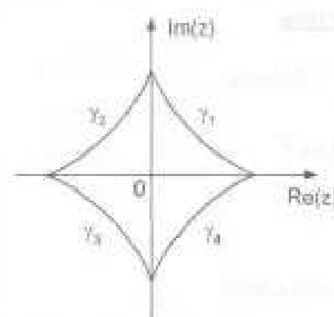
$$L_\gamma = \int_\alpha^\beta \|z'(t)\|dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \quad \text{existe } (L_\gamma < \infty \text{ finito}).$$

Ejemplos.-

(1) Hallar L_γ si $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$

Desarrollo

Parametrizando la curva $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$, se tiene:



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$L_\gamma = 4L_{\gamma_1}$

parametrizando la curva γ se tiene:

$z(t) = (a\cos^3 t, a\,sen^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$

para $L_\gamma = 4L_{\gamma_1}$, tomamos $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$z'(t) = (-3a\cos^2 t.sen\,t,\ 3a\,sen^2 t.\cos t)$, de donde su módulo es:

$$\|z'(t)\| = \sqrt{9a^2\cos^4 t.sen^2 t + 9a^2 sen^4 t.\cos^2 t} = \frac{3a}{2}sen\,2t$$

$$L_\gamma = 4L_{\gamma_1} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2}sen\,2t\,dt = -3a\cos 2t\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

(3) Si γ es la circunferencia con centro en el origen y radio 1, $f(z) = \frac{1}{z}$ recorrido positivamente, calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z}$

Desarrollo

$z(t) = (R\cos t, R\,\text{sen}\, t),\ 0 \le t \le 2\pi$, derivando

$z'(t) = (-R\,sent, R\cos t)$, de donde su módulo es:

$$\| z'(t) \| = \sqrt{R^2 sen^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} \| z'(t) \| \, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

(2) Hallar L_γ si $\gamma : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$

Desarrollo

Sea $\gamma: x^2 + y^2 = 1$, la circunferencia de centro en el origen y radio 1

Parametrizando la curva γ, se tiene: $\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = sent \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

$\gamma : z(t) = \cos t + i\,\text{sen}\, t \Rightarrow z'(t) = -sent + i\cos t$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)dt}{z(t)} = \int_0^{2\pi} \frac{-sent + i\cos t}{\cos t + isent} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{\cos t + isent}{\cos t + isent} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

(4) Calcular $\int_C z^2 dz$, donde C es el arco de una parábola $C : y = x^2$ desde (0,0) hasta (1,1).

Desarrollo

Parametrizando la curva $C: y = x^2$, de donde

$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t) = t + it^2,\ 0 \le t \le 1$

$$dz(t) = z'(t)dt = (1 + 2it)dt$$

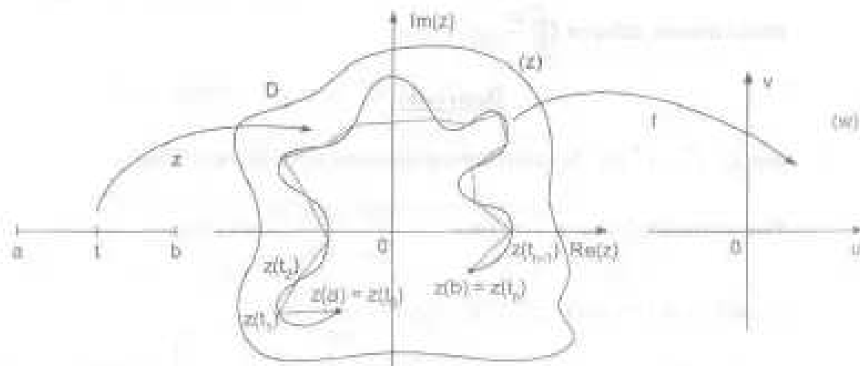
$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 z^2(t).dz(t) = \int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it)dt$$

$$= \int_0^1 [(t^2 - 5t^4) + (4t^3 - 2t^5)i]dt = (\frac{t^3}{3} - t^5) + (t^4 - \frac{t^6}{3})i \Big/_0^1$$

$$= (\frac{1}{3} - 1) + (1 - \frac{1}{3})i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}(-1 + i)$$

5.5. INTEGRALES CURVILÍNEAS EN C.-

Consideremos una curva $\gamma \subset C$ y una función f: $D \subset C \longrightarrow C$, tal que $\gamma \subset D$, donde f es inyectiva y continua por lo menos sobre la curva γ.



Los segmentos de z_0 a z_1; z_1 a z_2; z_2 a z_3; ... ; $z(t_{n-1})$ a $z(t_n)$ determinan una poligonal sobre la curva γ

Ahora tomamos los números complejos sobre la curva γ

α_1 entre z_0 y z_1

α_2 entre z_1 y z_2

α_3 entre z_2 y z_3

α_4 entre z_3 y z_4

.

.

.

α_{n-1} entre z_{n-2} y z_{n-1}

α_n entre z_{n-1} y z_n

Luego formamos la suma de Riemann

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta z_k$, donde f = u + iv

$$\Delta z_k = \Delta x_k + \Delta y_k$$

$$z_k = x_k + iy_k$$

$$\alpha_k = \alpha_k + i\beta_k$$

$$f(\alpha_k) = u(\alpha_k + i\beta_k) + iv(\alpha_k + i\beta_k)$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta z_k$ se forma para cada partición del intervalo [a,b], de esta manera obtenemos una sucesión de números complejos $\{S_n\}_{n \ge 1}$, el límite de S_n se le llama integral de línea de f(z) a lo largo de la trayectoria γ, es decir:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta z_k = \int_\gamma f(z)dz$$

$$f(\alpha_k) = u(\alpha_k, \beta_k) + iv(\alpha_k, \beta_k) = u + iv$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\alpha_k, \beta_k) + iv(\alpha_k, \beta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u + iv)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=1}^{n} [u\Delta x_k - v\Delta y_k) + i(u\Delta y_k + v\Delta x_k)]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u\Delta x_k - v\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (u\Delta y_k + v\Delta x_k)$$

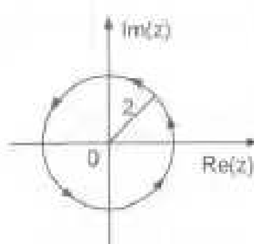
como f es inyectiva y continua por lo menos sobre la curva γ, entonces u y v son inyectiva y continuas, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n \to \infty} S_n = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma udy + vdx$$

Ejemplos.-

(1) Calcular la integral $\int_\gamma z^2 dz$ donde $\gamma: \| z \| = 2$

Desarrollo



γ: $\| z \| = 2$, parametrizando la curva

$\gamma: z(\theta) = 2e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$z'(\theta)d\theta = 2ie^{i\theta}\, d\theta$$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^{2\pi} z^2(\theta).z'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} 4e^{2i\theta}.2ie^{i\theta} d\theta$$

$$= 8i\int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{8}{3} e^{3i\theta} \Big/_0^{2\pi} = 0$$

Si $\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$

O sea γ: $z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \; a \le t \le b$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)).x'(t) - v(x(t), y(t)).y'(t)]dt +$$

$$+ i\int_a^b [u(x(t), y(t)).y'(t) + v(x(t), y(t)).x'(t)]dt$$

$$= \int_a^b u(x(t), y(t)).(x'(t) + iy'(t))dt + i\int_a^b v(x(t), y(t)).(x'(t) + iy'(t))dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))](x'(t) + iy'(t))dt = \int_a^b f(z(t)).z'(t)dt$$

$$\therefore \quad \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t)dt$$

(2) Calcular la integral $\int_\gamma z^2 dz$, donde $\gamma: y = x^2$, desde (0,0) hasta (2,4)

Desarrollo

$\gamma: y = x^2, \; 0 \le x \le 2$

parametrizando la curva $\gamma: y = x^2$

$\gamma: z = z(t) = t + it^2, \; 0 \le t \le 2$

$z'(t) = 1 + 2it$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^2 (t + it^2)^2 (1 + 2it)dt = \int_0^2 (t^2 - t^4 + 2it^3)(1 + 2it)dt$$

$$= \int_0^2 [(t^2 - 5t^4) + (4t^3 - 2t^5)i]dt = (\frac{t^3}{3} - t^5) + (t^4 - \frac{t^6}{3})i \Big/_0^2$$

$$= -\frac{28}{3} - \frac{16}{3}i$$

(3) Calcular la integral $\int_\gamma z^2 dz$, donde γ es la frontera del cuadrado de vértice $-1-i$, $1-i$, $1+i$, $-1+i$.

Desarrollo

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz + \int_{\gamma_3} z^2 dz + \int_{\gamma_4} z^2 dz \quad \text{... (1)}$$

parametrizando las líneas γ_1, γ_2, γ_3 y γ_4 se tiene:

$\gamma_1 = \{(1-t)(-1-i) + t(1-i) / 0 \le t \le 1\} = \{(2t-1) - i / 0 \le t \le 1\}$

$\gamma_1: \; z = z(t) = (2t-1) - i \; ; \; 0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_1} z^2 dz = \int_0^1 (2t-1-i)^2 2\,dt = 4\int_0^1 [(2t^2 - 2t) + i(1-2t)]dt$$

$$= 4(\frac{2t^3}{3} - t^2 - i(t - t^2))\Big/_0^1 = -\frac{4}{3} + i(0) = -\frac{4}{3} \quad \text{... (2)}$$

$\gamma_2 = \{(1-t)(1-i) + t(1+i) / 0 \le t \le 1\} = \{1 + (2t-1)i / 0 \le t \le 1\}$

$\gamma_2: \; z = z(t) = 1 + (2t-1)i \; ; \; 0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_2} z^2 dz = \int_0^1 [1 + (2t-1)i]^2 2i\,dt = 2i\int_0^1 [(2-2t) + 2(2t-1)i]dt$$

$$= 4i\int_0^1 [1 - t + (2t-1)i]dt = 4i[t - \frac{t^2}{2} + (t^2 - t)i]\Big/_0^1 = 4i[\frac{1}{2} - 0] = 2i \quad \text{... (3)}$$

$\gamma_3 = \{(1-t)(1+i) + t(-1+i) / 0 \le t \le 1\}$

$\gamma_3: \; z = z(t) = (1-2t) + i$

$$\int_{\gamma_3} z^2 dz = \int_0^1 (1-2t+i)^2(-2)dt = -2\int_0^1 [(1-2t)^2 + 2i(1-2t) - 1]dt$$

$$= -2[\frac{(1-2t)^3}{-6} + 2i(t - t^2) - t]\Big/_0^1 = -2[(\frac{1}{6} + 0 - 1) - (-\frac{1}{6} + 0 - 0)] = \frac{2}{3} \quad \text{... (4)}$$

$\gamma_4 = \{(1-t)(-1+i) + t(-1-i) / 0 \le t \le 1\}$

$\gamma_4: \; z = z(t) = -1 + (1-2t)i$

$$\int_{\gamma_4} z^2 dz = \int_0^1 [-1 + (1-2t)i]^2(-2i)dt = -2i\int_0^1 [1 - 2i(1-t) - (1-2t)^2]dt$$

$$= -2i[t + i\frac{(1-2t)^2}{2} + \frac{(1-2t)^3}{6}]\Big/_0^1 = -2i[(1 + (\frac{i}{2}) - \frac{1}{6}) - (0 + \frac{i}{2} + \frac{1}{6})]$$

$$= -2i[1 - \frac{2}{3} - i] = -2i(\frac{1}{3} - i) = -2 - \frac{2i}{3} \quad \text{... (5)}$$

ahora reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (1) se tiene:

$$\int_\gamma z^2 dz = -\frac{4}{3} + 2i + \frac{2}{3} - \frac{2i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$$

(4) Calcular $\int_\gamma \bar{z}\,dz$, si $\gamma: x^2 + y^2 = 1$

Desarrollo

γ: $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$

γ: $z = z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t, \; 0 \le t \le 2\pi$

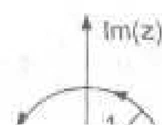
$z'(t) = -\operatorname{sen} t + i\cos t$

$\overline{z(t)} = \cos t - i\operatorname{sen} t$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{z(t)}.z'(t)dt = \int_0^{2\pi} (\cos t - i\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t + i\cos t)dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

(5) Calcular $\int_\gamma z\,dz$, donde $\gamma: x^2 + y^2 = 1$

Desarrollo



γ: $z = z(t) = \cos t - i \operatorname{sen} t, \; 0 \le t \le 2\pi$

$z'(t) = -\operatorname{sen} t + i\cos t$

(6) Como $F: \gamma \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es acotada, $\exists\, M > 0$ tal que $\| F(z) \| \le M$, $\forall\, z \in \gamma$, tal que $\| \int_\gamma F(z)dz \| \le ML_\gamma$ donde L_γ es la longitud de la curva.

Demostración



$$\int_{\gamma} z\,dz = \int_{0}^{2\pi} (\cos t + i\,sent)(-sen\,t + i\,sent)dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (-2sent\cos t + i\cos 2t)dt = 0$$

5.6. PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES CURVILÍNEAS.-

Sea $\gamma = \{z(t) / \alpha \le t \le \beta\}$, donde $z: [\alpha,\beta] \longrightarrow C$, $F; G: \gamma \subset C \longrightarrow C$, funciones continuas y λ un escalar, entonces:

① $\int_{\gamma} \gamma F(z)dz = \gamma \int_{\gamma} F(z)dz$

② $\int_{\gamma} [F(z) \pm G(z)]dz = \int_{\gamma} F(z)dz \pm \int_{\gamma} G(z)dz$ (La integral de línea es una transformación lineal)

③ $\| \int_{\gamma} F(z)dz \| \le \int_{\gamma} \| F(z) \| dz$



④ $\int_{-\gamma} F(z)dz = -\int_{\gamma} F(z)dz$

⑤ Si γ se subdivide en n subcurvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ tal que $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \ldots \cup \gamma_n$, entonces:

$$\int_{\gamma} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz + \int_{\gamma_2} F(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} F(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} F(z)dz$$

① Por demostrar: $\int_{\gamma} \lambda F(z)dz = \lambda \int_{\gamma} F(z)dz$, donde la integral $\int_{\gamma} F(z)dz$ existe: entonces $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$, para toda partición P_n, con $\| P_n \| < \delta$ tal que $\| \int_{\gamma} F(z)dz - \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i \| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, es decir que para todas esas particiones se tiene:

$\| \lambda \int_{\gamma} F(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \lambda F(z_i)\Delta z_i \| < \varepsilon$, es decir que $\int_{\gamma} \lambda F(z)dz$ existe y es igual a $\lambda \int_{\gamma} F(z)dz$, es decir: $\int_{\gamma} \lambda F(z)dz = \lambda \int_{\gamma} F(z)dz$

② Por demostrar $\int_{\gamma} (F(z) + G(z))dz = \int_{\gamma} F(z)dz + \int_{\gamma} G(z)dz$

Supongamos que $\int_{\gamma} F(z)dz$ y $\int_{\gamma} G(z)dz$ existen, entonces $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ para toda partición P_n con $\| P_n \| < \delta$ tal que: $\| \int_{\gamma} F(z)dz - \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i \| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\| \int_{\gamma} G(z)dz - \sum_{i=1}^{n} G(z_i)\Delta z_i \| < \frac{\varepsilon}{2}$, ahora consideremos

$$\| \int_{\gamma} F(z)dz + \int_{\gamma} G(z)dz - \sum_{i=1}^{n} (F(z_i) + G(z_i))\Delta z_i \| =$$

$$= \| \int_{\gamma} F(z)dz + \int_{\gamma} G(z)dz - \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i - \sum_{i=1}^{n} G(z_i)\Delta z_i$$

$$= \| (\int_{\gamma} F(z)dz - \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i) + (\int_{\gamma} G(z)dz - \sum_{i=1}^{n} G(z_i)\Delta z_i) \|$$

$$= \| \int_{\gamma} F(z)dz - \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i \| + \| \int_{\gamma} G(z)dz - \sum_{i=1}^{n} G(z_i)\Delta z_i \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

por lo tanto $\| \int_{\gamma} F(z)dz + \int_{\gamma} G(z)dz - \sum_{i=1}^{n} (F(z_i) + G(z_i))\Delta z_i \| < \varepsilon$

para toda partición P_n tal que $\| P_n \| < \delta$, entonces

$\int_{\gamma} (F(z)dz + G(z))dz$ existe y es igual a $\int_{\gamma} F(z)dz + \int_{\gamma} G(z)dz$

es decir: $\int_{\gamma} (F(z) + G(z))dz = \int_{\gamma} F(z)dz + \int_{\gamma} G(z)dz$

③ Por demostrar que: $\| \int_{\gamma} F(z)dz \| \le \int_{\gamma} \| F(z) \| \| dz \|$

aplicando la desigualdad de Cauchy

$$\| \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i \| \le \sum_{i=1}^{n} \| F(z_i)\Delta z_i \| = \sum_{i=1}^{n} \| F(z_i) \| \| \Delta z_i \|$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i \| \le \sum_{i=1}^{n} \| F(z_i) \| \| \Delta z_i \| \qquad \ldots (1)$$

como $\| F(z) \|$ es continua en z, entonces tomando límite cuando $\| P_n \| \to 0$ a ambos lados de (1)

$\lim\limits_{\|P_n\| \to 0} \| \sum_{i=1}^{n} F(z_i)\Delta z_i \| \le \lim\limits_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \| F(z_i) \| \| \Delta z_i \|$, se concluye que:

$$\| \int_{\gamma} F(z)dz \| \le \int_{\gamma} \| F(z) \| \| dz \|$$

④ Por demostrar que: $\int_{\gamma} F(z)dz = -\int_{-\gamma} F(z)dz$

Sea $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de [a,b] y $Q_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ unas ampliaciones de la partición de P_n donde $S_{n-i+1} = -t_i$ y $P_n = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ una partición de [-b,-a] donde $Q_n = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ una ampliación de P_n donde $s_{n-i} = -t_i$

Si γ es el contorno $z = z(t)$, $a \le t \le b$, entonces $-\gamma$ es el contorno $z = \bar{z}(s) = z(-s)$, $-b \le s \le a$

Puesto que $\int_{\gamma} F(z)dz$ y $-\int_{-\gamma} F(z)dz$ existen.

$$\int_{\gamma} F(z)dz = \lim_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(z(t_i))[z(t_i) - z(t_{i-1})]$$

$$\int_{-\gamma} F(z)dz = \lim_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\bar{z}(s_i))[\bar{z}(s_i) - \bar{z}(s_{i-1})]$$

para toda partición P_n y P_n respectivamente. En forma equivalente es decir:

$$\int_{-\gamma} F(z)dz = \lim_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\bar{z}(s_i))[\bar{z}(s_i) - \bar{z}(s_{i-1})]$$

como $t_i = -s_{n-i+1}$; $t_i = -s_{n-i}$ y $\bar{z}(s) = z(-s)$

$$\sum_{i=1}^{n} F(z(t_i))[z(t_i) - z(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F(z(-s_{n-i+1}))[z(-s_{n-i}) - z(-s_{n-i+1})]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} F(\bar{z}(s_{n-i+1}))[\bar{z}(s_{n-i+1}) - \bar{z}(s_{n-i})]$$

como $\| P_n \|$ y $\| P_n \|$ tienden a cero simultáneamente, entonces tomando límites a ambos lados cuando $\| P_n \| \to 0$

$$\lim_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(z(t_i))[z(t_i) - z(t_{i-1})] = \lim_{\|P_n\| \to 0} -\sum_{i=1}^{n} F(\bar{z}(s_{n-i+1}))[\bar{z}(s_{n-i+1}) - \bar{z}(s_{n-i})]$$

$$\lim_{\|P_{n+r}\| \to 0} \sum_{i=1}^{n+r} F(z_i)(z_i - z_{i-1}) = \lim_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(z_i)(z_i - z_{i-1}) + \lim_{\|P_r\| \to 0} \sum_{i=n+1}^{n+r} F(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

de donde se concluye que: $\int_{\gamma} F(z)dz = -\int_{-\gamma} F(z)dz$

(5) Demostrar para el caso $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, es decir, por demostrar que

$$\int_{\gamma} F(z)dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz + \int_{\gamma_2} F(z)dz$$

Sea $P_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y $P_r = \{t_n, t_{n+1}, ..., t_{n+r}\}$ partición de [a,b] y [b,c] respectivamente donde γ_1 es la curva $z = z(t)$, $a \le t \le b$, y γ_2 es la curva $z = z(t)$, $b \le t \le c$ y $Q_n = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ y $Q_r = \{t_{n+1}, t_{n+2}, ..., t_{n+r}\}$ ampliaciones de las particiones de P_n y P_r

Como $\int_{\gamma_1} F(z)dz$, $\int_{\gamma_2} F(z)dz$ existen, entonces

$$\int_{\gamma_1} F(z)dz = \lim_{\|P_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

$$\int_{\gamma_2} F(z)dz = \lim_{\|P_r\|\to 0} \sum_{i=n+1}^{n+r} F(z_i)(z_i - z_{i-1}), \text{ para todo } P_n \text{ y } P_r$$

de igual manera como $\int_{\gamma_1+\gamma_2} F(z)dz$ existe, ∀ partición P_{n+r} de [a,b] entonces

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} F(z)dz = \lim_{\|P_{n+r}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n+r} F(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

esta ecuación es valida si $P_{n+r} = P_n \cup P_r$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n+r} F(z_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F(z_i)(z_i - z_{i-1}) + \sum_{i=n+1}^{n+r} F(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

tomando limite cuando $\|P_{n+r}\| \to 0$ se tiene:

de donde se concluye que: $\int_{\gamma} F(z)dz = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz + \int_{\gamma_2} F(z)dz$

(6) Por demostrar $\| \int_{\gamma} F(z)dz \| \le ML$, donde $\|F(z)\| \le M$

Si $\|F(z)\| \le M$, $\forall z \in \gamma$, entonces por la propiedad (3) se tiene que para toda partición P_n

$$\sum_{i=1}^{n} \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|F(z(t_i))\| \sqrt{(\frac{dx(t_i)}{dt})^2 + (\frac{dy(t_i)}{dt})^2}\Delta t_i$$

$$\le M \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\frac{dx(t_i)}{dt})^2 + (\frac{dy(t_i)}{dt})^2}$$

tomando limite a ambos lados cuando $\|P_n\| \to 0$

$$\lim_{\|P_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| \le M. \underbrace{\lim_{\|P_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\frac{d(x(t_i))}{dt})^2 + (\frac{d(y(t_i))}{dt})^2}}_{L}$$

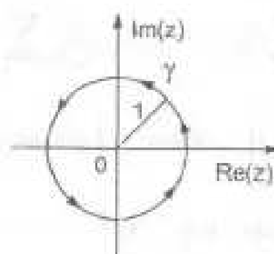
de donde $\int_{\gamma} \|F(z)dz\| \|dz\| \le ML$

$\therefore \quad \| \int_{\gamma} F(z)dz \| \le ML$ por la propiedad (3)

Ejemplos.-

(1) Calcular $\int_{\gamma} Re(z^6)dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 1\}$

Desarrollo



$\gamma = \{z \in C / \|z\| = 1\} = \{e^{i\theta} / 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$z(\theta) = e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = ie^{i\theta}$

$z^6(\theta) = e^{6i\theta} = \cos 6\theta + isen 6\theta$

de donde $Re(z^6(\theta)) = \cos 6\theta$

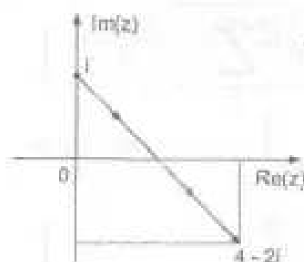
$$\int_{\gamma} Re(z^6)dz = \int_0^{2\pi} Re(z^6(\theta)).z'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 6\theta . ie^{i\theta} d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{i\theta}.\cos 6\theta \, d\theta = ie^{i\theta}[\frac{isen6\theta - 6\cos 6\theta}{i^2 + 36}] \Big/_0^{2\pi}$$

$$= ie^{2\pi i}(-\frac{6}{35}) - i(-\frac{6}{35}) = -\frac{6i}{35}[\cos 2\pi + isen 2\pi - 1] = -\frac{6i}{35}(1-1) = 0$$

$\therefore \quad \int_{\gamma} Re(z^6)dz = 0$

(2) Calcular $\int_{\gamma} \|z\|^2 dz$, donde γ es el segmento que une $z = i$, $w = 4 - 2i$



Desarrollo

$\gamma = \{(1-t)i + tw / 0 \le t \le 1\}$

$= \{(1-t)i + t(4-2i) / 0 \le t \le 1\}$

$z(t) = 4t + (1-3t)i, \; 0 \le t \le 1$

$\|z(t)\|^2 = 16t^2 + (1-3t)^2$

$$\int_{\gamma} \|z\|^2 dz = \int_0^1 \|z(t)\|^2 z'(t)dt = \int_0^1 [16t^2 + (1-3t)^2](4-3i)dt$$

$$= (4-3i)\int_0^1 (25t^2 - 6t + 1)dt = (4-3i)(\frac{25t^3}{3} - 3t^2 + t) \Big/_0^1$$

$$= (4-3i)(\frac{25}{3} - 3 + 1) = \frac{19}{3}(4-3i)$$

(3) Calcular $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz + z^2 d\bar{z}$, a lo largo de la curva

$\gamma: z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2-2i)z + (2+2i)\bar{z}$ desde $z = 1$ a $z = 2 + 2i$

Desarrollo

Identificando la curva, $\gamma: z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2-2i)z + (2+2i)\bar{z}$

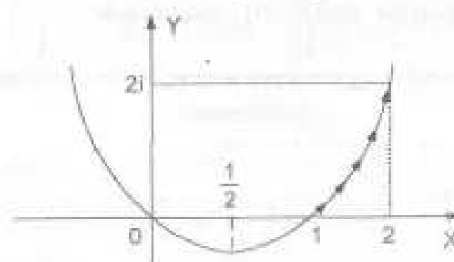
$$\gamma: (z+\bar{z})^2 = 2(z+\bar{z}) - 2i(z-\bar{z}) \qquad ... (1)$$

pero se conoce: $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$ ... (2)

ahora reemplazamos en (2) en (1), es decir:

$\gamma: (2x)^2 = 2(2x) - 2i(2iy)$, de donde

$\gamma: y = x^2 - x$, es decir: $\gamma: y + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$ es una parábola



$\gamma: y = x^2 - x \; ; \; 1 \le x \le 2$

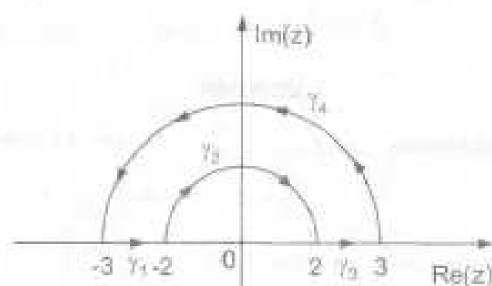
$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx + idy \\ d\bar{z} = dx - idy \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz + z^2 d\bar{z} = \int_{\gamma} (x^2 - y^2 - 2xyi)(dx + idy) + \int_{\gamma} (x^2 - y^2 + 2xyi)(dx - idy)$$

$$= \int_{\gamma} 2(x^2 - y^2)dx + 4xydy = \int_1^2 [2(x^2 - (x^2 - x)^2) + 4x(x^2 - x)(2x - 1)]dx$$

$$= \int_1^2 (6x^4 - 8x^3 + 4x^2)dx = \frac{248}{150}$$

④ Calcular $\int_\gamma \bar{z}dz$, si γ es la curva del grafico



Desarrollo

Se observa que: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

Parametrizando cada una de estas sub-líneas

$\gamma_1 = \{(1-t)(-3) + t(-2) / 0 \le t \le 1\}$, simplificando

$\gamma_1 = \{-3 + t / 0 \le t \le 1\}$, de donde se tiene: $z(t) = -3 + t$, entonces $z'(t) = 1$

$z(t) = -3 + t \Rightarrow \overline{z(t)} = \overline{-3+t} = -3 + t$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}dz = \int_0^1 (-3+t)dt = (-3t + \frac{t^2}{2}) \Big/_0^1 = -\frac{5}{2} \qquad \text{... (1)}$$

$\gamma_2 = \{2e^{i\theta} / 0 \le \theta \le \pi\}$, de donde $z(\theta) = 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta} \Rightarrow \overline{z(\theta)} = 2e^{-i\theta}$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}dz = \int_0^\pi 2e^{-i\theta}.2ie^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi 4i\,d\theta = 4\pi i \qquad \text{... (2)}$$

$\gamma_3 = \{(1-t)2 + 3t / 0 \le t \le 1\} = \{2 + t / 0 \le t \le 1\}$, de donde

$z(t) = 2 + t \Rightarrow z'(t) = 1;\ \overline{z(t)} = 2 + t$

$$\int_{\gamma_3} \bar{z}dz = \int_0^1 (2+t)dt = (2t + \frac{t^2}{2}) \Big/_0^1 = \frac{5}{2} \qquad \text{... (3)}$$

$\gamma_4 = \{3e^{i\theta} / 0 \le \theta \le \pi\}$, de donde $z(\theta) = 3e^{i\theta} \Rightarrow \overline{z(\theta)} = 3e^{-i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 3ie^{i\theta}$

$$\int_{\gamma_4} \bar{z}dz = \int_0^\pi 3e^{-i\theta}.3ie^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi 9i\,d\theta = 9\pi i \qquad \text{... (4)}$$

$$\int_\gamma \bar{z}dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \bar{z}dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}dz + \int_{\gamma_3} \bar{z}dz + \int_{\gamma_4} \bar{z}dz \qquad \text{... (5)}$$

reemplazando (1), (2), (3), (4) en (5) se tiene: $\int_\gamma \bar{z}dz = -\frac{5}{2} + 4\pi i + \frac{5}{2} + 9\pi i = 13\pi i$

5.7. TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.-

Sea R una región simplemente conexa con frontera C suave a trozos, orientada en sentido contrario al de las agujas de un reloj; si P(x,y), Q(x,y), $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son continuas en una región abierta que contiene a R entonces:

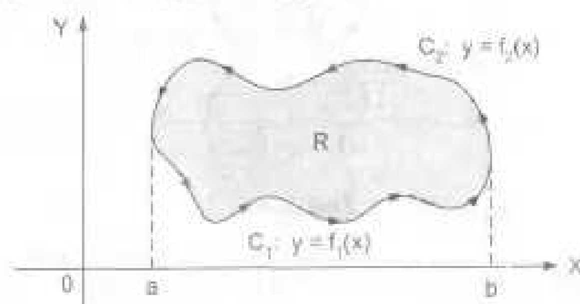
$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Demostración

Daremos una demostración solamente para una región que es a la vez verticalmente simple y horizontalmente simple, luego la región R se describe en dos formas:

$R = \{(x,y) / a \le x \le b \wedge f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$

$R = \{(x,y) / c \le y \le d \wedge g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$



Del gráfico se observa que: $C = C_1 \cup C_2$

La integral de línea $\int_C P(x,y)$ puede escribirse como:

$$\int_C P(x,y)dx = \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx$$

$$= \int_a^b P(x, f_1(x))dx - \int_a^b P(x, f_2(x))dx \qquad \text{... (1)}$$

por otra parte tenemos:

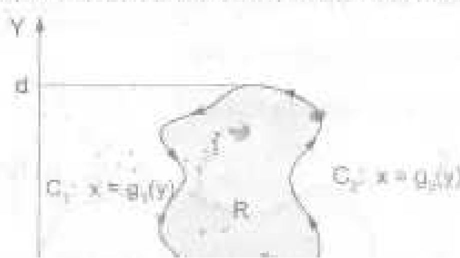
$$\iint_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dA = \int_a^b (\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy)dx = \int_a^b P(x,y) \Big/_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]dx = -\int_a^b [P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))]dx \qquad \text{... (2)}$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int_C P(x,y)dx = -\iint_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dA \qquad \text{... }(\alpha)$$

En forma similar para el caso donde R es simplemente horizontal



Del gráfico se observa que: $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C Q(x,y)dy = \int_{C_1} Q(x,y)dy + \int_{C_2} Q(x,y)dy = \int_d^c Q(g_1(y),y)dy + \int_c^d Q(g_2(y),y)dy$$

$$= \int_c^d [Q(g_2(y),y) - Q(g_1(y),y)]dy \qquad \text{... (3)}$$

por otra parte se tiene:

$$\iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dA = \int_c^d (\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx)dy$$

$$= \int_c^d Q(x,y) \Big/_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy = \int_c^d [Q(g_2(y),y) - Q(g_1(y),y)]dy \qquad \text{... (4)}$$

ahora reemplazando (4) en (3) se tiene: $\int_C Q(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dA \qquad \text{... }(\beta)$

al sumar (α) y (β) se obtiene:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dA$$

NOTA.- El teorema de Green es válido para regiones más complicadas como circulares, triángulos, etc.

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea

$\int \frac{3x - y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}}{\ldots}dx + \frac{18y^3 + x^3\sqrt{1+x^2+4y^3}}{\ldots}dy$, donde $\gamma: x^2 + y^2 = 1$

$$\frac{\dots}{3\sqrt{1+x^2+4y^2}} \qquad \frac{\dots}{3\sqrt{1+x^2+4y^2}}$$

Desarrollo

Como $\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy$, de donde

$$P(x,y)=\frac{3x-y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+4y^3}}-\frac{y^3}{3}$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{-6xy^2}{(1+x^2+4y^3)^{\frac{3}{2}}}-y^2$$

$$Q(x,y)=\frac{18y^3+x^3\sqrt{1+x^2+4y^3}}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}=\frac{6y^3}{\sqrt{1+x^2+4y^3}}+\frac{x^3}{3}$$

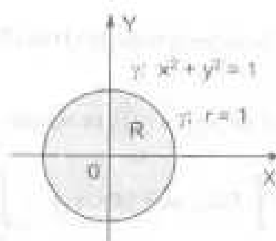
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{-6xy^3}{(1+x^2+4y^3)^{\frac{3}{2}}}+x^2$$

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy$$

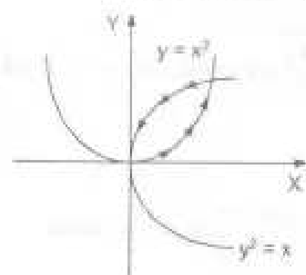
$$=\iint_R(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2.r\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big/_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4}=\frac{\pi}{2}$$



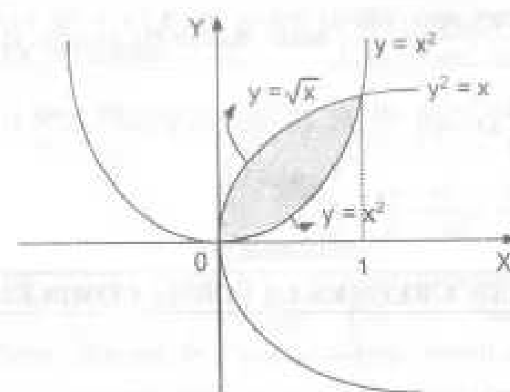
Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\oint_\gamma (e^x+x^2y)dx+3x^2y\,dy$, donde γ es la curva cerrada determinado por $y=x^2$, $y^2=x$



Desarrollo

Sea $\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases}$

Ahora graficamos la región R



Como $\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy$, de donde

$$\begin{cases} P(x,y)=e^x-x^2y \\ Q(x,y)=3x^2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=x^2 \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=6xy \end{cases}$$

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_R(6xy+y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(6xy+x^2)dy\right)dx=\int_0^1(3xy^2+x^2y)\Big/_{x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_0^1(3x^2+x^2\sqrt{x}-3x^5-x^4)dx\,fc=(x^3+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{x^6}{2}-\frac{x^5}{5})\Big/_0^1$$

$$=(1+\frac{2}{7}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5})-0=\frac{1}{2}+\frac{3}{35}=\frac{35+6}{70}=\frac{41}{70}$$

OBSERVACIÓN.-

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y};\quad \bar{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}},\ \text{donde } B(z,\bar{z})=P(x,y)+iQ(x,y)$$

$$\nabla B=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)=\frac{\partial}{\partial x}(P+iQ)+i\frac{\partial}{\partial y}(P+iQ)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$$

5.8. TEOREMA DE GREEN EN LA FORMA COMPLEJA.-

Sea $F(z)$ una función compleja continua y sus derivadas parciales continuas en una región R y sobre su frontera y donde $z=x+iy$; $\bar{z}=x-iy$

Probar que el teorema de Green se puede escribir en la forma compleja como:

$$\oint_\gamma F(z)dz=2i\iint_R\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}}dx\,dy$$

Demostración

Sea $F(z)=P(x,y)+i\,Q(x,y)$, $dz=dx+i\,dy$

$$\oint_\gamma F(z)dz=\oint_\gamma[P(x,y)+iQ(x,y)](dx+idy)$$

5.9. TEOREMA DE CAUCHY PARA INTEGRALES DE LINEA EN EL PLANO COMPLEJO.-

Sea $f(z)$ una función analítica en Ω, Ω simplemente conexa y suave a trazos, entonces

$$\int_\gamma F(z)dz=0$$

Demostración

Se conoce que: $\int_\gamma F(z)dz=\int_\gamma(udx-vdy)+i\int_\gamma udy+vdx$, donde

$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ o $f=u+iv$

como $f(z)$ es continua en Ω, $\Rightarrow \exists\ f'(z)$, $\forall z\in\Omega$ y $f'(z)$ es continua en Ω, es decir que existen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ y son continuas en Ω, entonces podemos aplicar el teorema de Green a las integrales $\int_\gamma udx-vdy$ y $i\int_\gamma udy+vdx$, es decir:

$$\int_\gamma udx-vdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}(-v)-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy=-\iint_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \quad \dots(1)$$

$$i\int_\gamma udy+vdx=i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy \quad \dots(2)$$

$$= \oint_{\gamma} (P(x,y)dx - Q(x,y)dy) + i\oint_{\gamma} (Q(x,y)dx + P(x,y)dy)$$

$$= -\iint_{R} (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dx\,dy + i\iint_{R} (\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y})dx\,dy$$

$$= i\iint_{R} ((\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}) + i(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}))dx\,dy$$

$$= 2i\iint_{R} \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}}dx\,dy$$

NOTA.- Este último resultado se obtiene de la observación.

$$i\int_{\gamma} u\,dy - v\,dx = i\iint_{\Omega} (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})dx\,dy \quad \ldots (2)$$

ahora sumando (1) y (2) y se obtiene:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\gamma} u\,dy + v\,dx$$

$$= -\iint_{\Omega} (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})dx\,dy + i\iint_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dx\,dy \quad \ldots (3)$$

como f(z) es analítica en Ω, entonces se cumple las ecuaciones de Cauchy - Riemann

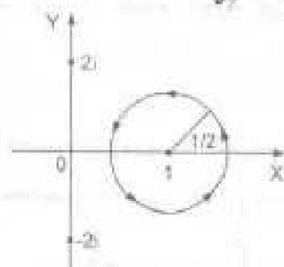
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots (4)$$

reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = -\iint_{\Omega} (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x})dx + i\iint_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x})dx\,dy = 0 + i\,0 = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Ejemplo.- Calcular $\oint_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)}$ donde $\gamma : \| z - 1 \| = \frac{1}{2}$

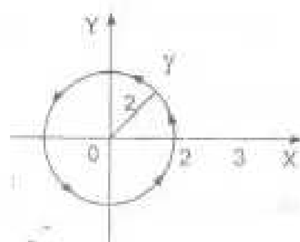


Desarrollo

$f(z) = \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)}$ es analítica dentro y sobre γ, puesto que z = 0, -2i, 2i están fuera de γ, entonces por el teorema de Cauchy, se tiene:

$$\int_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)}dz = 0$$

Ejemplo.- Calcular $\int_{\gamma} \frac{e^{z^2\cos^3 z}\operatorname{sen} z^2}{(z-3)^5}dz$, si $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 2\}$



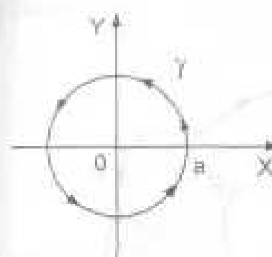
Desarrollo

$f(z) = \frac{e^{z^2\cos^3 z}\operatorname{sen} z^2}{(z-3)^5}$ es analítica dentro y sobre de γ, entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2\cos^3 z}\operatorname{sen} z^2}{(z-3)^5}dz = 0$$

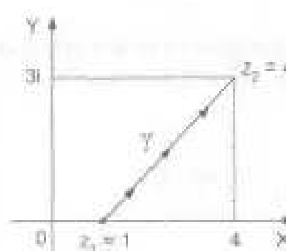
Ejemplo.- Calcular $\int_{\gamma} z^4dz$ donde $\gamma : x^2 + y^2 = a^2$

Desarrollo



$f(z) = z^4$ es analítica $\forall z \in C$ y además γ es una curva cerrada entonces por el teorema de Cauchy $\int_{\gamma} z^4dz = 0$

Ejemplo.- Calcular $\int_{\gamma} z\,dz$, donde γ es la curva que une los puntos $z_1 = 1$, $z_2 = 4 + 3i$



Desarrollo

f(z) = z es analítica en C pero γ no es cerrada

$$\Rightarrow \int_{\gamma} z\,dz \neq 0$$

parametrizando γ se tiene:

$\gamma = \{(1-t) + t(4+3i) / 0 \le t \le 1\} = \{1 + 3t + 3it / 0 \le t \le 1\}$

$z(t) = 1 + 3t + 3it \Rightarrow z'(t) = 3 + 3i$

$$\int_{\gamma} z\,dz = \int_0^1 (1+3t+3it)(3+3i)dt = 3(1+i)\int_0^1 (1+3t+3it)dt = 3(1+i)[t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3it^2}{2}]\Big/_0^1$$

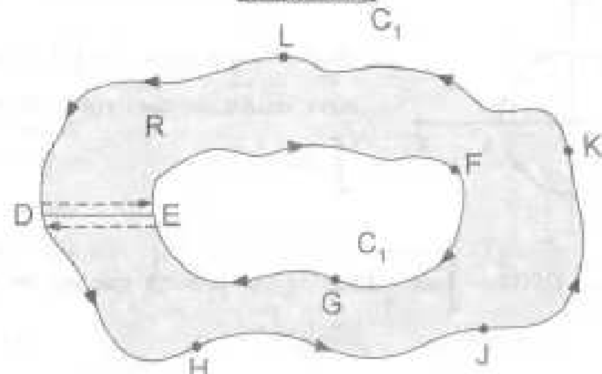
$$= 3(1+i)[1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i] = 3(1+i)[\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i] = \frac{3}{2}[5i - 3] = -\frac{3}{2}[3 - 5i]$$

5.10. TEOREMA.-

Sea f(z) analítica es una región R limitada por dos curvas simples cerradas C_1 y C_2 (sombreadas en la figura) y también sobre C_1 y C_2

Probar que: $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$, donde C_1 y C_2 recorren en sentido relativo a sus interiores.

Demostración



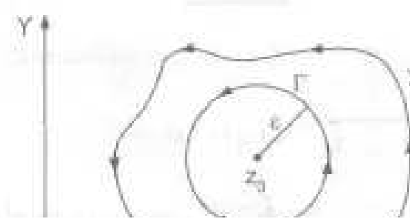
Construimos el corte transversal DE y como f(z) es analítica en la región R entonces por el teorema de Cauchy: $\int_{DEFGEDHJKLD} f(z)dz = 0$

TEOREMA.- Sea F(z) una función analítica en el de una región R y de γ una curva simple, si z_0 es un punto interior a γ, entonces:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{F(z)dz}{z - z_0}$$

Demostración

La función $\frac{F(z)}{z - z_0}$, es analítica dentro y sobre la curva γ, excepto en el punto $z = z_0$



$$\int_{DE} f(z)dz + \int_{EFGE} f(z)dz + \int_{ED} f(z)dz + \int_{DHIJKLD} f(z)dz = 0 \qquad \ldots (1)$$

como $\int_{DE} f(z)dz = -\int_{ED} f(z)dz \qquad \ldots (2)$

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$\int_{EFGE} f(z)dz + \int_{DHIJKLD} f(z)dz = 0$, de donde

$$\int_{DHIJKLD} f(z)dz = -\int_{EFGE} f(z)dz = \int_{EGFE} f(z)dz$$

lo que es lo mismo expresar como: $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$

5.11. LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.-

La fórmula de la integral de Cauchy indica si f es una función analítica en el interior y sobre los puntos de una curva cerrada simple γ, los valores interiores de γ están completamente determinados por los valores de f sobre γ.



Del teorema (5.10) se tiene: $\oint_{\gamma} \frac{F(z)dz}{z-z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz \qquad \ldots (1)$

como Γ se puede elegir como un círculo de radio ε con centro z_0; luego una ecuación para Γ es $\Gamma : \|z-z_0\| = \varepsilon$ ó $z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$, donde $0 \le \theta \le 2\pi$

$z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ entonces $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{F(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} F(z_0+\varepsilon e^{i\theta})d\theta \qquad \ldots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) y se obtiene:

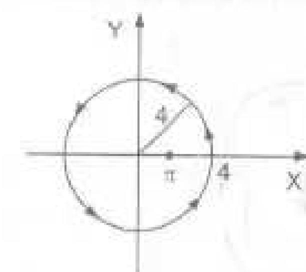
$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz = i\int_0^{2\pi} F(z_0+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

tomando límite a ambos lados cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz = \lim_{\varepsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} F(z_0+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz = i\int_0^{2\pi} F(z_0)dz = 2\pi i F(z_0) \quad \text{de donde} \quad F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}dz}{z-\pi}$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 4\}$



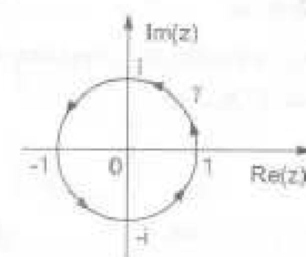
Desarrollo

$F(z) = e^{z^2}$ es analítica en C

$F(z_0) = F(\pi) = e^{\pi^2}$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}dz}{z-\pi} = 2\pi i F(\pi) = 2\pi e^{\pi^2} i$$

Ejemplo.- Calcular $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+8z}$, donde γ: $\|z\| = 1$



Desarrollo

A la integral dada expresamos:

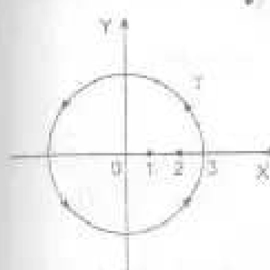
$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+8z} = \oint_{\gamma} \frac{\frac{dz}{z+8}}{z}, \text{ donde}$$

$f(z) = \frac{1}{z+8}$ es analítica en el interior del círculo γ: $\|z\| = 1$ y $z_0 = 0$ está en el interior a γ

Luego la fórmula de la integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+8z} = \oint_{\gamma} \frac{\frac{dz}{z+8}}{z-0} = 2\pi i f(0) = 2\pi i\left(\frac{1}{0+8}\right) = \frac{\pi i}{4}$$

Ejemplo.- Calcular $\oint_{\gamma} \frac{sen\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$, donde γ: $\|z\| = 3$



Desarrollo

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

a la integral dada expresamos en la forma.

$$\oint_{\gamma} \frac{sen\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_{\gamma} \frac{sen\pi z^2 + \cos\pi z^2}{z-2}dz - \oint_{\gamma} \frac{sen\pi z^2 + \cos\pi z^2}{z-1}dz$$

$$= 2\pi i\, f(2) - 2\pi i\, f(1) = 2\pi i\,(0+1) - 2\pi i\,(0-1) = 4\pi i$$

puesto que $f(z) = sen\pi z^2 + \cos\pi z^2$ es analítica en el interior sobre la curva γ: $\|z\| = 3$

5.12. FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY PARA DERIVADAS PARCIALES.-

Si F(z) es analítica dentro y sobre la frontera γ de una región R simplemente conexa, entonces:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z-z_0}dz$$

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$F''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{1.2F(z)dz}{(z-z_0)^3}$$

$$F'''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{1.2.3.F(z)dz}{(z-z_0)^4}$$

$$\vdots$$

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{1.2.3...nF(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{n!\,F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n \in Z^+$$

de donde
$$\boxed{\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i F^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\oint_{\gamma} \frac{z^{10}+z^4-4z+1}{(z-1)^5}dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 3\}$

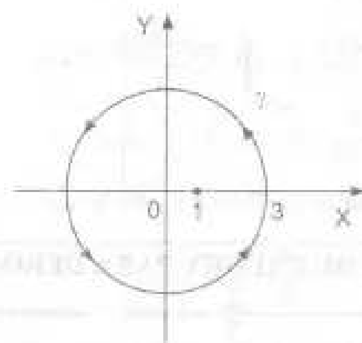
$$\oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) \quad \text{donde } f(z) = \cosh z$$

$= \pi i(1) = \pi i \qquad f'(z) = senh z$

$f''(z) = \cosh z$

$\therefore \oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^3}dz = \pi i \qquad f''(0) = 1$

Desarrollo



Sea $F(z)=z^{10}+z^4-4z+1$, $z_0=1$

$$\oint_\gamma \frac{z^{10}+z^4-4z+1}{(z-1)^6}dz=2\pi i f^V(1)$$

$$f'(z)=10z^9-4z^3-4$$

$$f''(z)=90z^8\pm 12z^2$$

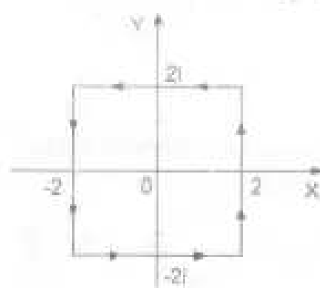
$$f'''(z)=720z^7+24z$$

$$f^{IV}(z)=5040z^6+24$$

$$f^V(z)=30240z^5 \Rightarrow f^V(1)=30240$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{z^{10}+z^4-4z+1}{(z-1)^6}dz=2\pi i(30240)=60480\pi i$$

Ejemplo.- Probar que: $\oint_\gamma \frac{\cosh z}{z^3}dz=\pi i$, si γ es el cuadrado en $\pm 2, \pm i$

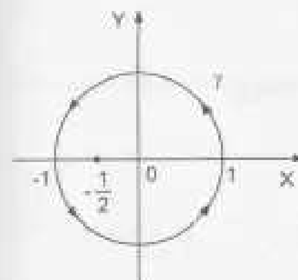


Desarrollo

Como $f(z)=\cosh z$ es analítica en el interior y sobre el cuadrado

Aplicando la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas parciales superiores

Ejemplo.- Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}dz$, donde $\gamma: \| z \| = 1$



Desarrollo

A la integral dada expresamos así:

$$\oint_\gamma \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}dz=\oint_\gamma \frac{\frac{z^5-3z^3+1}{z^2+4}dz}{2z+1}$$

donde $f(z)=\frac{z^5-3z^3+1}{z^2+4}$ es analítica dentro y sobre de la curva $\gamma: \| z \| = 1$, $z_0=-\frac{1}{2}$ esta en el interior de la curva γ entonces por la fórmula de la integral de Cauchy, se tiene:

$$\oint_\gamma \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}dz=2\pi i f(-\frac{1}{2})=2\pi i(\frac{-\frac{1}{32}+\frac{3}{8}+1}{\frac{1}{4}+4})=2\pi i(\frac{43}{272})=\frac{43\pi i}{136}$$

Ejemplo.- Si n es un entero positivo, Probar que: $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-sen\theta)d\theta=\frac{2\pi}{n!}$

Desarrollo

Usando la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas superiores:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad ...(1)$$

donde $f(z)=e^z$, $z_0=0$, $\gamma: \| z \| = 1$

como $z_0=0$ está en el interior de γ

$f^{(n)}(z)=e^z \Rightarrow f^{(n)}(0)=e^0=1$ reemplazando en (1)

$$1=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^{n+1}} \text{ de donde } I=\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}$$

Sea $\gamma=\{e^{i\theta} / 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

Como $z\in\gamma \Rightarrow z=e^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi \Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta$

$$z^{n+1}=(e^{i\theta})^{n+1}=e^{i(n+1)\theta}$$

$$I=\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta}{e^{i(n+1)\theta}}=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\theta+isen\theta}e^{i\theta}}{e^{i(n+1)\theta}}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\theta}e^{isen\theta}}{e^{in\theta}}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{i(sen\theta-n\theta)}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(sen\theta-n\theta)+isen(sen\theta-n\theta)]d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(sen\theta-n\theta)+isen(n\theta-sen\theta)]d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(sen\theta-n\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}sen(n\theta-sen\theta)d\theta=\frac{2\pi i}{n!}$$

igualando partes imaginarias se tiene:

$$\therefore \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(sen\theta-n\theta)d\theta=\frac{2\pi}{n!}$$

5.13. TEOREMA DE ACOTACIÓN DE CAUCHY (DESIGUALDAD DE CAUCHY).-

Sea f(z) una función analítica dentro y sobre la circunferencia de centro z_0 y radio r, entonces $\| f^{(n)}(z_0) \| \leq \frac{M.n!}{r^n}$, $\forall$ $n\geq 0$, donde M es una constante tal que $\| f(z) \| \leq M$, $\forall z$ dentro de γ

Demostración

De la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas superiores:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

parametrizando la circunferencia de centro z_0 y de radio r.

$\gamma: z=z_0+re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\| f^{(n)}(z_0) \| \leq \frac{n!}{2\pi}\oint_\gamma \frac{\| f(z) \|}{\| z-z_0 \|^{n+1}}\| dz \|$$

$$\leq \frac{n!.M}{2\pi r^{n+1}}\oint_\gamma \| dz \| = \frac{n!.M}{2\pi r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!.M}{r^n}$$

$$\therefore \| f^{(n)}(z_0) \| \leq \frac{n!.M}{r^n}, \forall n\geq 0$$

5.14. TEOREMA DE LIOUVILLE.-

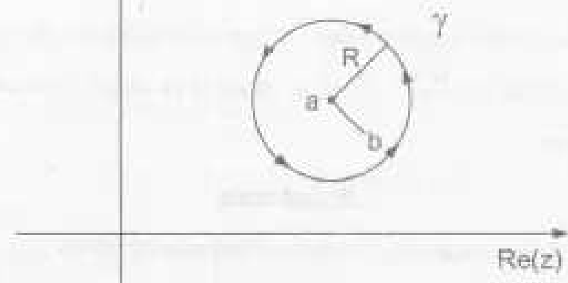
Sea f(z) una función analítica en C y f(z) es acotada, esto es $\| f(z) \| \leq M$, $\forall z\in C$, entonces f(z) es constante.

Demostración

Sean a y b ∈ C arbitrarios y consideremos la circunferencia concéntrica de a y de radio R tal que $\| a-b \| < \frac{R}{2}$

Im(z)

$\| f(a)-f(b) \| \leq \frac{2\| a-b \| M}{R}$, $\forall R>0$, hacemos $R\to +\infty$



De la fórmula integral de Cauchy

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-b}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)(a-b)}{(z-a)(z-b)}dz$$

$$\| f(a)-f(b)\| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma}\frac{\| f(z)\| \| a-b\|}{\| z-a\| \| z-b\|}\| dz\|$$

$$\le \frac{M.\| a-b\|}{2\pi}\oint_{\gamma}\frac{\| dz\|}{\| z-a\| \| z-b\|} \qquad \text{... (1)}$$

por otro lado se tiene: $\| z-a\| = R$ y

$$\| z-b\| = \|(z-a)+(a-b)\| \ge \| z-a\| - \| a-b\| \ge R-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}$$

como $\| z-b\| \ge \frac{R}{2}$ entonces $\| z-a\| \| z-b\| \ge \frac{R^2}{2}$

de donde se tiene: $\frac{1}{\| z-a\| \| z-b\|}\le \frac{2}{R^2}$ ... (2)

ahora reemplazamos (2) en (1) y se obtiene:

$$\| f(a)-f(b)\| \le \frac{M.\| a-b\|}{2\pi}\cdot\frac{2}{R^2}\oint_{\gamma}\| dz\| = \frac{M.\| a-b\|}{\pi R^2}\oint_{\gamma}\| dz\| = \frac{M.\| a-b\|}{\pi R^2}2\pi R$$

R

entonces $\| f(a)-f(b)\| = 0 \Rightarrow f(a)=f(b)$

5.15. TEOREMA DE MORERA.- (RECÍPROCO DEL TEOREMA DE CAUCHY)

Si f(z) es una función continua en una región R simplemente conexa y si $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$, alrededor de cada curva simple cerrada γ en R, entonces f(z) es analítica en R.

Demostración

Como $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$, ∀ toda curva cerrada γ contenida en R, entonces la integral de f de z_0 a z a lo largo de cualquier contorno Γ es independiente de Γ con tal que z_0, z y Γ están en R, es decir: $\int_{z_0}^{z} f(t)dt$ está definida y si z_0 es fijo entonces $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(t)dt$

Sea $V_{\delta_1}(z)$ una vecindad de z tal que $V_{\delta_1}(z)\subset R$ y $z_1\in V_{\delta_1}(z)$ entonces:

$$\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}-f(z)=\frac{1}{z_1-z_0}\left[\int_{z_0}^{z_1} f(t)dt-\int_{z_0}^{z} f(t)dt\right]-f(z)$$

$$=\frac{1}{z_1-z}\left[\int_{z}^{z_1} f(t)dt-\int_{z}^{z_1} f(z)dt\right]=\frac{1}{z_1-z}\int_{z}^{z_1}(f(t)-f(z))dt$$

como $z, z_1\in R$, la última integral es independiente del contorno que une z a z_1, contenido en R.

Como f es continua, entonces ∀ ε > 0, ∃ δ > 0, tal que $\delta<\delta_1$ y $\| f(t)-f(z)\| < \varepsilon$, ∀ t que satisface $\| t-z\| < \delta$, puesto que t está en el segmento que une z y z_1 t $\| t-z\| < \delta$ siempre que $\| z-z_1\| < \delta$ entonces

$$\left\| \int_{z}^{z_1}(f(t)-f(z))dt\right\| \le \int_{z}^{z_1}\| f(t)-f(z)\| \| dt\|$$

$$<\varepsilon \| z_1-z\|, \ \forall z_1$$

que satisface $\| z-z_1\| < \delta$, por lo tanto

$$\left\| \frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}-f(z)\right\| < \frac{1}{\| z_1-z\|}\varepsilon \| z_1-z\| = \varepsilon, \ \forall z_1$$

que satisface $\| z_1-z\| < \delta$ entonces $F'(z)$ existe y es igual a f(z) entonces $F'(z)$ es analítica si F(z) lo es, por lo tanto f(z) es analítica si F(z) es analítica.

5.16. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.-

Sea $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0$, con $a_n\neq 0$ un polinomio de grado n entonces $\exists\ z_0\in C$ tal que $P(z_0)=0$

Demostración

Demostraremos por el absurdo

Supongamos que P(z) ≠ 0, ∀ z ∈ C, entonces $f(z)=\frac{1}{P(z)}$ es analítica en todo C

Como P(z) → ∞, cuando z → ∞ entonces f(z) → 0, cuando z → ∞

Esto es dado ε > 0, ∃ R > 0 suficientemente grande tal que ‖ f(z) ‖ < ε, ∀ ‖ z ‖ > R

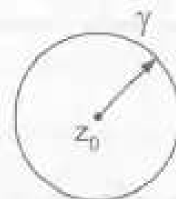
Como f es analítica entonces f(z) es acotada para todo ‖ z ‖ < R esto es ‖ f(z) ‖ ≤ M, ∀ ‖ z ‖ < R, así: ‖ f(z) ‖ ≤ M + ε, ∀ z ∈ C

Luego como f(z) es analítica y acotada ⇒ f(z) es constante lo cual es una contradicción, por el inverso de una función polinómica no es constante, luego $\exists\ z_0$ tal que $P(z_0)=0$

5.17. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE GAUSS.-

Si f(z) es una función analítica dentro y sobre una circunferencia con centro en z_0 y radio r > 0 entonces $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$

Demostración



Por la integral de Cauchy se tiene:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

como $z\in\gamma$, $z=z_0+re^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$

$$dz=rie^{i\theta}d\theta$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$\therefore\ f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

5.18. TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO.-

Si f(z) es una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada γ y f(z) no es constante, entonces el máximo de ‖ f(z) ‖ ocurre sobre γ.

Demostración

Supongamos que: $\| f(z_0)\| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| f(z+re^{i\theta})\| d\theta$ ... (1)

Si $\| f(z_0+re^{i\theta})\| < \| f(z_0)\|$, para cualquier θ entonces $\| f(z_0+re^{i\theta})\| < \| f(z_0)\|$ para $\theta_1<\theta<\theta_2$, integrando ambas partes

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| f(z_0+re^{i\theta})\| d\theta<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| f(z_0)\| d\theta=\frac{1}{2\pi}\| f(z_0)\| 2\pi=\| f(z_0)\|$$

entonces $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\| f(z_0+re^{i\theta})\| d\theta<\| f(z_0)\|$ ... (2)

por lo tanto (1) y (2) se contradicen, la contradicción con la desigualdad de Cauchy.

Luego el valor máximo de $\| f(z_0)\|$ ocurre sobre la curva γ.

5.19. TEOREMA DEL MÓDULO MÍNIMO.-

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada γ, $f(z) \neq 0$ dentro de γ, entonces el mínimo de $\| f(z) \|$ ocurre sobre γ.

Demostración

El máximo de $\| \frac{1}{f(z)} \|$ ocurre sobre γ, esto es, existe un $z_1 \in C$, tal que $\| \frac{1}{f(z)} \| \leq \| \frac{1}{f(z_1)} \|$, $\forall z \in C$, que está dentro de γ entonces:

$\| f(z_1) \| \leq \| f(z) \|$, $\forall z$ dentro de γ

5.20. TEOREMA DEL ARGUMENTO.-

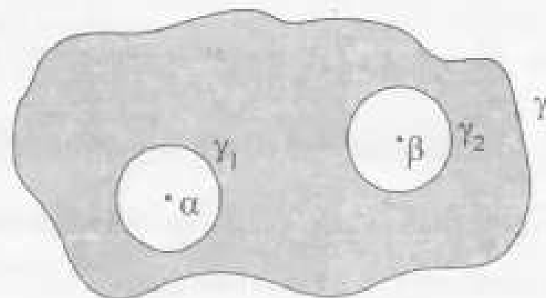
Si $f(z)$ es una función analítica dentro y sobre una curva simple cerrada γ, excepto en un número finito de polos entonces $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$, donde:

N = número de ceros de $f(z)$ dentro de γ, $\sum n = N$

P = número de polos de $f(z)$ dentro de γ, $\sum p = P$

Demostración

Supongamos que $f(z)$ tenga un cero de multiplicidad "n" en α y un polo de orden P en β.



Entonces $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ ... (*)

Como $f(z) = (z-\alpha)^N h(z)$, entonces se tiene:

$\text{Ln}(f(z)) = N\,\text{Ln}(z-\alpha) + \ln(h(z))$, derivando

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z-\alpha} + \frac{h'(z)}{h(z)}$, ahora integrando

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{N\,dz}{z-\alpha} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{h'(z)dz}{h(z)} = N \qquad ... (1)$$

como $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\beta)^P} \Rightarrow \ln(f(z)) = \ln(g(z)) - P\ln(z-\beta)$, derivando

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{P}{z-P}$, integrando ambos miembros

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \frac{P}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z-\beta} = -P \qquad ... (2)$$

de (1), (2) y (*) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

5.21. APLICACIONES DEL TEOREMA DE CAUCHY.-

① **INTEGRALES DE FRESNEL:** $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$, $\int_0^{\infty} \text{sen}\, x^2 dx$

Para calcular estas integrales, nos apoyaremos en una función auxiliar de variable compleja, $f(z) = e^{iz^2}$ que es analítica en todo plano complejo y por lo tanto se puede aplicar el Teorema de Cauchy, es decir:

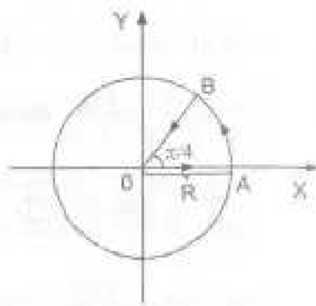
$\oint_{\gamma} e^{iz^2} dz = 0$, donde γ es cualquier curva cerrada y simple contenida en C.

En particular consideremos la curva: $\gamma = \overline{OA} \cup \widehat{AB} \cup \overline{BO}$ (ver figura)

Donde $\overline{OA}$ es el semi eje positivo de longitud R (R > 0 arbitrario)

$\widehat{AB}$ es el arco de la circunferencia de radio R y con centro en el origen de coordenadas.

$\overline{BO}$ es la bisectriz del primer cuadrante, entonces $\overline{BO}$ $\measuredangle(AOB) = \frac{\pi}{4}$, luego se tiene:



$$\oint_{\gamma} e^{iz^2} dz = \int_{\overline{OA}} e^{iz^2} dz + \int_{\widehat{AB}} e^{iz^2} dz + \int_{\overline{BO}} e^{iz^2} dz \qquad ... (1)$$

ahora calculamos cada una de las integrales

denotaremos por: $I_1(R) = \int_{\overline{OA}} e^{iz^2} dz = \int_0^R \cos x^2 dx + i\int_0^R \text{sen}\, x^2 dx$ ... (2)

$\widehat{AB}$: $z = z(\theta) = Re^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$z^2 = R^2 e^{2i\theta} = R^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\, 2\theta)$, $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$ además $dz = Rie^{i\theta} d\theta$

$$I_2(R) = \int_{\widehat{AB}} e^{iz^2} dz = iR\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\, 2\theta)} e^{i\theta} d\theta$$

pero como $\| e^{z} \| = \| e^{x+iy} \| = e^{x}$, $\| e^{i\theta} \| = 1$

entonces $\| I_2(R) \| \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \text{sen}\, 2\theta} d\theta$ ... (3)

OBSERVACIÓN.- La función $f(\alpha) = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}$ es decreciente en el intervalo $< 0, \frac{\pi}{2} >$, es decir si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ entonces $f(\alpha) > f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha} > \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$

entonces $\text{sen}\,\alpha > \frac{2\alpha}{\pi}$

Si $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ para $\alpha = 2\theta \Rightarrow \text{sen}\, 2\theta > \frac{2}{\pi}(2\theta)$

$$\Rightarrow \text{sen}\, 2\theta > \frac{4\theta}{\pi} \Rightarrow R^2 \text{sen}\, 2\theta > \frac{4R^2\theta}{\pi} \text{ entonces}$$

$-R^2 \text{sen}\, 2\theta < -\frac{4R^2\theta}{\pi} \Rightarrow e^{-R^2 \text{sen}\, 2\theta} < e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}}$, integrando

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \text{sen}\, 2\theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi}{4R^2}[e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}}] \Big/_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\pi}{4R^2}(e^{-R^2} - 1) = \frac{\pi}{4R^2}(1 - e^{-R^2}), \text{ de donde}$$

ahora denotaremos que: $I_2(R)\to 0$, cuando $R\to\infty$ para esto consideremos:

$$\| I_2(R)\| = \| \oint_{AB} e^{z^2}dz \| = \| iR \| \| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{R^2(\cos 2\theta + i sen 2\theta)} e^{i\theta} d\theta \|$$

$$\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \| e^{R^2(\cos 2\theta + i sen 2\theta)} \| \| e^{i\theta} \| d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 sen 2\theta} d\theta < \frac{\pi}{4R^2}(1-e^{-R2}) \qquad \dots (4)$$

ahora reemplazamos (4) en (3) y se obtiene:

$$\| I_2(R)\| < R.\frac{\pi}{4R^2}(1-e^{-R2}) = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R2}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

entonces $\| I_2(R)\| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \Rightarrow \int_{\widehat{AB}} e^{z^2}dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ ... (5)

ahora nos falta calcular $I_3(R)$

Sobre $\overline{BO}$: Si $z\in\overline{BO} \Rightarrow z = z(t) = t(\cos\frac{\pi}{4} + i sen\frac{\pi}{4})$ donde t varía desde R hasta 0, entonces tenemos

$$z^2 = t^2(\cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}) = it^2 \Rightarrow iz^2 = -t^2$$

$$dz = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)dt, \text{ entonces}$$

$$I_3(R) = \int_{\overline{BO}} e^{iz^2}dz = \int_R^0 e^{-t^2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-t^2}dt$$

entonces $\lim_{R\to\infty} I_3(R) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^\infty e^{-t^2}dt$

de la función Gamma se tiene: $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt$, convergente, $\forall$ p > 0

haciendo $t^2 = u \Rightarrow t = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$

Si $t\to 0; \Rightarrow u\to 0; t\to\infty \Rightarrow u\to\infty$

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{2}-1}du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

entonces $\lim_{R\to\infty} I_3(R) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^\infty e^{-t^2}dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i \qquad \dots (6)$$

ahora reemplazamos (2), (5) y (6) en (1)

$$\oint_\gamma e^{iz^2}dz = \int_0^R \cos x^2 dx + i\int_0^R sen x^2 dx + 0 + I_3(R) = 0$$

$$\int_0^R \cos x^2 dx + i\int_0^R sen x^2 dx = -I_3(R)$$

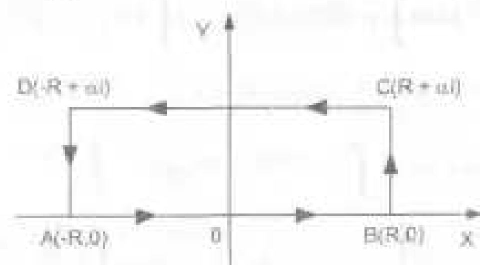
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos x^2 dx + i\lim_{R\to\infty}\int_0^R sen x^2 dx = -\lim_{R\to\infty} I_3(R)$$

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + i\int_0^\infty sen x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i$$

$$\therefore \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \text{ y } \int_0^\infty sen x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

(2) **LA INTEGRAL:** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)dx$, **($\lambda$ > 0, α > 0)**

Para calcular esta integral, consideremos la integral de la función $f(z) = e^{-\lambda z^2}$, sobre la trayectoria cerrada γ que consiste del contorno del rectángulo representado por la figura.



$\gamma = \overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}$

Como la función $f(z) = e^{-\lambda z^2}$ es analítica, $\forall z\in C$, entonces podemos aplicar el Teorema de la integral de Cauchy, es decir:

$$\int_\gamma e^{-\lambda z^2}dz = \int_{\overline{AB}} e^{-\lambda z^2}dz = \int_{\overline{BC}} e^{-\lambda z^2}dz + \int_{\overline{CD}} e^{-\lambda z^2}dz + \int_{\overline{DA}} e^{-\lambda z^2}dz = 0 \qquad \dots (1)$$

Sobre $\overline{AB}$: z = x, -R < x < R $\wedge$ dz = dx

$$I_1(R) = \int_{\overline{AB}} e^{-\lambda z^2}dz = \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2}dx, \text{ tomando limite cuando } R\to\infty$$

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R e^{-\lambda x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u}.\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}u^{\frac{1}{2}-1}du = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{2}-1}du = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \qquad \dots (2)$$

(sea $\lambda x^2 = u \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}u^{\frac{1}{2}-1}du$)

Sobre $\overline{BC}$: z = R + iy, $0\leq y\leq\alpha$

$z^2 = R^2 - y^2 + 2Ryi$ y dz = i dy

$$I_2(R) = \int_{\overline{BC}} e^{-\lambda z^2}dz = i\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2+2Ryi)}dy = i\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}e^{-2R\lambda i}dy$$

Entonces $-\lambda(R^2-y^2)\leq -\lambda(R^2-\alpha^2)$ de donde $e^{-\lambda(R^2-y^2)}\leq e^{-\lambda(R^2-\alpha^2)}$, integrando

$$\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}dy \leq \int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-\alpha^2)}dy = e^{-\lambda(R^2-\alpha^2)}.\alpha = \frac{\alpha e^{\lambda\alpha^2}}{e^{\lambda R^2}}$$

$$I_2(R)\leq \frac{\alpha e^{\lambda\alpha^2}}{e^{\lambda R^2}}\to 0; \text{ cuando } R\to\infty \text{ entonces } \lim_{R\to\infty} I_2(R) = 0 \qquad \dots (3)$$

Sobre $\overline{CD}$: z = x + iα, -R ≤ x ≤ R (x varía de R hasta –R)

$z^2 = x^2 - \alpha^2 + 2\alpha xi \wedge dz = dx$

$$I_3(R) = \int_{\overline{CD}} e^{-\lambda z^2}dz = \int_R^{-R} e^{-\lambda(x^2-\alpha^2+2\alpha xi)}dx = -e^{\lambda\alpha^2}\int_{-R}^R e^{-\lambda x^2-2\alpha\lambda xi}dx$$

$$= -e^{\lambda\alpha^2}\int_{-R}^R e^{-\lambda x^2}(\cos 2\lambda\alpha x - i sen 2\lambda\alpha x)dx$$

$$\lim_{R\to\infty} I_3(R) = -e^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2}\cos 2\lambda\alpha x dx + ie^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2} sen 2\lambda\alpha x dx \qquad \dots (4)$$

Sobre $\overline{DA}$: z = -R + iy (0 ≤ y ≤ α) (y varía desde α hasta 0)

probaremos que: $I_3(R)\to 0$, cuando $R\to\infty$

En efecto: $\|I_3(R)\|=\|i\|\|\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}.e^{-2R\lambda yi}dy\|$

$$\le\int_0^\alpha |e^{-\lambda(R^2-y^2)}\|\|e^{-2R\lambda yi}\|dy=\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}dy$$

por lo tanto: $I_3(R)\le\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}dy$

Cuando R > α y como 0 ≤ y ≤ α ⇒ $y^2\le\alpha^2$ ⇒ $-y^2\ge-\alpha^2$

De donde $R^2-y^2\ge R^2-\alpha^2$ ⇒ $\lambda(R^2-y^2)\ge\lambda(R^2-\alpha^2)$, λ > 0

$z^2=R^2-y^2-2Ryi$ y dz = i dy

$$I_4(R)=\int_{\overline{CD}}e^{-\lambda z^2}dz=\int_\alpha^{0}e^{-\lambda(R^2-y^2-2Ryi)}i\,dy$$

Probaremos que $I_4(R)\to0$, cuando $R\to\infty$

En efecto: $\|I_4(R)\|\le\int_0^\alpha \|e^{-\lambda(R^2-y^2)}\|\|e^{2R\lambda yi}\|dy=\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}dy$

$$\le\alpha e^{-\lambda(R^2-\alpha^2)}=\frac{\alpha e^{\lambda\alpha^2}}{e^{\lambda R^2}}\to0,\ \text{cuando } R\to\infty$$

es decir: $\lim_{R\to\infty}I_4(R)=0$ ... (5)

de la ecuación (1) se tiene: $I_1(R)+I_2(R)+I_3(R)+I_4(R)=0$

$$\lim_{R\to\infty}I_1(R)+\lim_{R\to\infty}I_2(R)+\lim_{R\to\infty}I_3(R)+\lim_{R\to\infty}I_4(R)=0 \quad ...(*)$$

ahora reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (*)

$$\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}+0+e^{\lambda\alpha^2}\int_\infty^{-\infty}e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)dx+ie^{\lambda\alpha^2}\int_\infty^{-\infty}e^{-\lambda x^2}sen(2\lambda\alpha x)dx=0$$

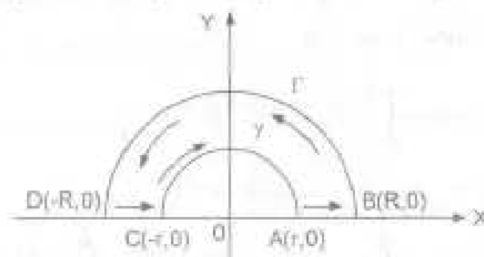
$$-e^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)dx+ie^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}sen(2\lambda\alpha x)dx=-\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

de donde se tiene: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\lambda\alpha^2}$ y $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}sen(2\lambda\alpha x)dx=0$

(3) **La integral:** $\int_0^\infty\frac{senx}{x}dx$

Para calcular esta integral consideremos la función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ que es analítica en todo el dominio D ⊆ C excepto en el origen de coordenadas.

Tomando la trayectoria de integración γ representada en la figura.



La función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, es analítica dentro y sobre $C=\overline{AB}\cup\Gamma\cup\overline{DC}\cup\gamma$ (curva cerrada) entonces por el teorema de la integral de Cauchy se tiene:

$$\oint_C\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\overline{AB}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_\Gamma\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\overline{DC}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_\gamma\frac{e^{iz}}{z}dz=0 \quad ...(1)$$

ahora calculamos cada una de estas integrales

Sobre $\overline{AB}$: z = x, r ≤ x ≤ R ∧ dz = dx, entonces

$$\int_{\overline{AB}}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_r^R\frac{\cos x}{x}dx+i\int_r^R\frac{senx}{x}dx,\ \text{entonces}$$

Sea $I_1(r,R)=\int_r^R\frac{\cos x}{x}dx+i\int_r^R\frac{senx}{x}dx$, entonces cuando r → 0 ∧ R → ∞ entonces

$$\lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}I_1(r,R)=\int_0^\infty\frac{\cos x}{x}dx+i\int_0^\infty\frac{senx}{x}dx \quad ...(2)$$

Sobre Γ: $z=Re^{i\theta}$, 0 ≤ θ ≤ π ∧ $dz=Rie^{i\theta}d\theta$ entonces

$$\int_\Gamma\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^\pi\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}.Rie^{i\theta}d\theta=i\int_0^\pi e^{(-Rsen\theta+iR\cos\theta)}d\theta$$

$I_2(R)=i\int_0^\pi e^{-Rsen\theta+iR\cos\theta}d\theta$ (probaremos que $I_2(R)\to0$ cuando $R\to\infty$)

En efecto: $\|I_2(R)\|\le\int_0^\pi e^{-Rsen\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-Rsen\theta}d\theta$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ∧ $sen\theta\ge\frac{2\theta}{\pi}$ ⇒ $Rsen\theta\ge\frac{2R\theta}{\pi}$ entonces

$-Rsen\theta\le-\frac{2R\theta}{\pi}$ ⇒ $e^{-Rsen\theta}\le e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}$, integrando

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-Rsen\theta}d\theta\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}d\theta=-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2R}(e^{-R}-1)$$

$$\|I_2(R)\|\le\frac{\pi}{R}(1-\frac{1}{e^R})\underset{R\to\infty}{\to}0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}I_2(R)=0 \quad ...(3)$$

Sobre $\overline{DC}$: z = x, -R ≤ x ≤ -r ∧ dz = dx entonces

$$I_3(r,R)=\int_{\overline{DC}}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{-R}^{-r}\frac{\cos x}{x}dx+i\int_{-R}^{-r}\frac{senx}{x}dx$$

como -R ≤ x ≤ -r ⇒ r ≤ -x ≤ R entonces sustituyendo x por -x de donde se obtiene:

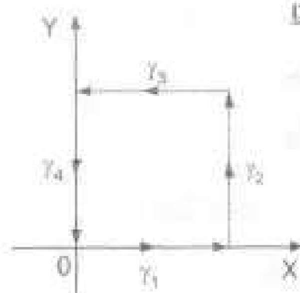
$$I_3(r,R)=-\int_r^R\frac{\cos x}{x}dx+i\int_r^R\frac{senx}{x}dx$$

$$\lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}I_3(r,R)=-\int_0^\infty\frac{\cos x}{x}dx+i\int_0^\infty\frac{senx}{x}dx \quad ...(4)$$

Sobre γ: $z=re^{i\theta}$, 0 ≤ θ ≤ π ∧ $dz=rie^{i\theta}d\theta$

$$I_4(r)=\int_\gamma\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_\pi^0\frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=-i\int_0^\pi e^{ir(\cos\theta+isen\theta)}d\theta$$

Desarrollo



Sea $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$

$z=x+iy \Rightarrow \|z\|^2=x^2+y^2$

dz = dx + i dy

$$\int_\gamma\|z\|^2dz=\int_{\gamma_1}\|z\|^2dz+\int_{\gamma_2}\|z\|^2dz+\int_{\gamma_3}\|z\|^2dz+\int_{\gamma_4}\|z\|^2dz \quad ...(1)$$

$\gamma_1: \vec{\alpha}_1(t)=(t,0)$, 0 ≤ t ≤ 1, dz = dt

Se prueba que: cuando $r \to 0 \Rightarrow I_r(R) \to -i\int_0^{\pi} d\theta = -i\pi$ ... (5)

Ahora reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (1) se tiene:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx + 0 - \int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx - \pi i = 0$$

de donde $2i\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx = \pi i \qquad \therefore \int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

OBSERVACIÓN.- La integral $\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx$, también podemos calcular aplicando transformada de Laplace de igual manera se puede calcular por la Transformada de Fourier.

5.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Calcular $\oint_{\gamma} \| z \|^2 dz$, donde γ es un cuadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,1), (1,0).

$$\int \| z \|^2 dz = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big/_0^1 = \frac{1}{3} \quad ... (2)$$

$\gamma_2 : \vec{\alpha}_2(t) = (1,t)$, $0 \le t \le 1$, $dz = i\, dt$

$$\int \| z \|^2 dz = \int_0^1 (1+t^2)i\,dt = i(t+\frac{t^3}{3})\Big/_0^1 = \frac{4}{3}i \quad ... (3)$$

$\gamma_3 : \vec{\alpha}_3(t) = (1-t,1)$, $0 \le t \le 1$, $dz = -dt$

$$\int_{\gamma_3} \| z \|^2 dz = \int_0^1 [(1-t)^2+1](-dt) = -[-\frac{(1-t)^3}{3}+t]\Big/_0^1 = -\frac{4}{3} \quad ... (4)$$

$\gamma_4 : \vec{\alpha}_4(t) = (0,1-t)$, $0 \le t \le 1$, $dz = -i\, dt$

$$\int \| z \|^2 dz = \int_0^1 [0+(1-t)^2](-i\,dt) = \frac{(1-t)^3 i}{3}\Big/_0^1 = -\frac{i}{3} \quad ... (5)$$

ahora reemplazamos (2), (3), (4), (5) en (1)

$$\int \| z \|^2 dz = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big/_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \therefore \int_{\gamma} \| z \|^2 dz = -1+i$$

② Calcular $\oint_{\gamma} \text{Im}(z)\bar{z}\| e^z \| dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 1\}$

Desarrollado

Como $\| z \| = 1$, entonces $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{Im}(z) = \text{sen}\,\theta$, $\bar{z} = e^{-i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$

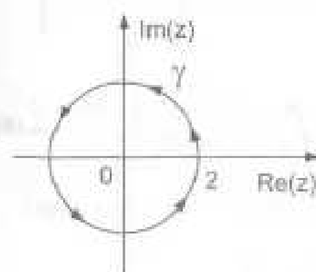
$\| e^z \| = \| e^{\cos\theta + i sen\theta} \| = e^{\cos\theta}$ puesto que $\| e^{i sen\theta} \| = 1$

$$\oint_{\gamma} \text{Im}(z).\bar{z}\| e^z \| dz = \int_0^{2\pi} sen\theta.e^{i\theta}.e^{\cos\theta}.ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}sen\theta\, d\theta = -ie^{\cos\theta}\Big/_0^{2\pi}$$

$$= -i[e^{\cos 2\pi} - e^{\cos\theta}] = -i[e-e] = 0$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \text{Im}(z).\bar{z}\| e^z \| dz = 0$$

③ Calcular $\oint_{\gamma} (x^2+iy^2)\| dz \|$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 2\}$



Desarrollo

Parametrizando la curva

$\gamma : z = \| z \| e^{i\theta} = 2e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i sen\theta)$

donde $0 \le \theta \le 2\pi$

$dz = 2ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow \| dz \| = 2\, d\theta$

$$\oint_{\gamma} (x^2+iy^2)\| dz \| = \int_0^{2\pi} [4\cos^2\theta - 4isen^2\theta]2\,d\theta$$

$$= 8[\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta - i\int_0^{2\pi} sen^2\theta\, d\theta] = 8[\pi - i\pi] = 8\pi(1-i)$$

④ Evaluar $\oint_{\gamma}\frac{dz}{z}$ donde γ es la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Desarrollo

Parametrizando la curva $\gamma : z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$$

⑤ Comprobar que: $\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^n} = 0$ para $n \ge 2$ donde γ es la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Desarrollo

Parametrizando la curva $\gamma : z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$

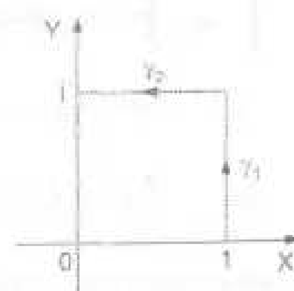
$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{(e^{i\theta})^n}ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}d\theta = \frac{1}{1-n}e^{(1-n)i\theta}\Big/_0^{2\pi} = \frac{1}{1-n}[e^{2(1-n)i\pi} - 1] = 0$$

puesto que $e^{2(1-n)i\pi} = 1$, $\forall n \ge 2$ $\qquad \therefore \oint_{\gamma}\frac{dz}{z^n} = 0$

⑥ Evaluar la integral $\oint_{\gamma} x\,dz$, a lo largo de la curva parametrizada

$$\gamma : z(t) = \begin{cases} 1+it & , 0 \le t \le 1 \\ (2-t)+i & , 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Desarrollo



Como $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$, de donde

$$z'(t) = \begin{cases} i & , 0 \le t \le 1 \\ -i & , 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} x\,dz = \int_0^1 i\,dt + \int_1^2 (2-t)(-1)dt = -\frac{1}{2}+i$$

) Calcular la integral en forma analítica $\int_{\gamma}\bar{z}^2 dz$, donde γ es la frontera del triángulo de vértices (0,0), (2,0) y (2,2).



Desarrollo

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

⑧ Probar que: $\| \int_{\gamma}\frac{dz}{z^2} \| \le 4$, donde γ es el segmento que une $z = i$ a $z = 4+i$

Desarrollo

Como $\| \int_{\gamma}\frac{dz}{z^2} \| \le ML_{\gamma}$ donde $\| F(z) \| \le M$ y $L_{\gamma} = \int_{\gamma} \| dz \|$



$\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, parametrizando

$\gamma_1 : z(t) = t,\ 0 \le t \le 2,\ \gamma_2 : z(t) = 2 + ti,\ 0 \le t \le 2$

$\gamma_3 : z(t) = (2-2t) + i(2-2t),\ 0 \le t \le 1$

$$\int_\gamma \bar{z}^2 dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_3} \bar{z}^2 dz \qquad \dots (1)$$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz = \int_{\gamma_1} (x^2 - y^2 - 2xyi)dz = \int_0^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big/_0^2 = \frac{8}{3} \qquad \dots (2)$$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz = \int_{\gamma_2} (x^2 - y^2 - 2xyi)dz = i\int_0^2 (2+ti)^2 dt = \frac{i(2+ti)^3}{3i}\Big/_0^2 = \frac{1}{3}[8(2i)(1+i)] - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{3}[16i - 16 - 8] = -8 + \frac{16i}{3} \qquad \dots (3)$$

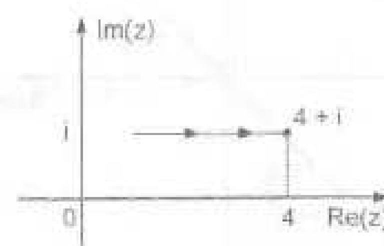
$$\int_{\gamma_3} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 [2-2t + i((2-2t))^2](-2(1+i))dt = -8(1+i)\int_0^1 [(1-t) + i(1-t)]^2 dt$$

$$= -8(1+i)\int_0^1 [(1-t)^2 + 2i(1-t)^2 - (1-t)^2]dt = -16i\int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$= \frac{16i}{3}(1-t)^3\Big/_0^1 = 0 - \frac{16i}{3} = -\frac{16i}{3} \qquad \dots (4)$$

reemplazando (2), (3) y (4) en (1) se tiene: $\int_\gamma \bar{z}^2 dz = \frac{8}{3} - 8 + \frac{16i}{3} - \frac{16i}{3} = -\frac{16}{3}$

$z(t) = i + t(4) = 4t + i,\ 0 \le t \le 1$



$dz(t) = 4\,dt \Rightarrow \int_\gamma \| dz(t) \| = 4$

$\| f(z) \| = \| \frac{1}{z^2} \| \le 1 \Rightarrow M = 1$

$\| \int_\gamma \frac{dz}{z^2} \| \le 4$

(9) Calcular la integral $\int_\gamma \text{Re}(z^6)dz$, donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \| z \| = 1\}$

Desarrollo

Parametrizando la curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \| z \| = 1\}$

Es decir: $\gamma : z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$z(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow z^6(\theta) = \cos 6\theta + i\,\text{sen}\,6\theta$

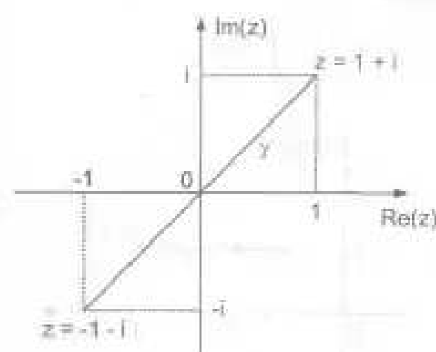
de donde $\text{Re}(z(\theta)) = \cos 6\theta \Rightarrow dz(\theta) = ie^{i\theta} d\theta$

$$\int_\gamma \text{Re}(z^6)dz = \int_0^{2\pi} \cos 6\theta . ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cos 6\theta\, d\theta$$

$$= ie^{i\theta}\left[\frac{i\,\text{sen}\,6\theta - 6\cos 6\theta}{i^2 + 6^2}\right]\Big/_0^{2\pi} = 0$$

(10) Probar que: $\| \int_\gamma z^4 dz \| \le 8\sqrt{2}$ donde γ es el segmento que une $z = -1 - i$ y $z = 1 + i$

Desarrollo



Como $\| \int_\gamma z^4 dz \| \le ML_\gamma$

Parametrizando el segmento

$\gamma : z(t) = (1-t)(-1-i) + t(1+i),\ 0 \le t \le 1$

$\gamma : z(t) = 2t - 1 + i(2t - 1),\ 0 \le t \le 1$

$z'(t) = 2 + 2i,\ 0 \le t \le 1$

$\| z'(t) \| = 2\sqrt{2}$

$L_\gamma = \int_\gamma \| dz \| = \int_0^1 2\sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2} \Rightarrow L_\gamma = 2\sqrt{2}$

$\| f(z) \| \le M \Rightarrow f(z) = z^4(1) = (1+i)^4 \Rightarrow f(z) = -4$

$\Rightarrow \| f(z) \| \le 4 \Rightarrow M = 4$, por lo tanto: $\| \int_\gamma z^4 dz \| \le M_\gamma = 4(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$

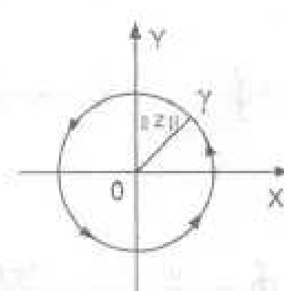
$\therefore\ \| \int_\gamma z^4 dz \| \le 8\sqrt{2}$

(11) Probar que: $\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \| \le 2\pi e^2$ donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \| z \| = 2\}$

Desarrollo

Como $\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \| \le ML_\gamma$ donde $\| f(z) \| \le M$ y $L_\gamma = \int_\gamma \| dz \|$

$\| f(z) \| = \| \frac{e^z}{z} \| \le \frac{e^{\| z \|}}{\| z \|} = \frac{e^2}{2} \Rightarrow M = \frac{e^2}{2}$



parametrizando la curva γ

$\gamma : z(\theta) = 2e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$z(\theta) = 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$

$\| z'(\theta) \| = 2$

$L_\gamma = \int_\gamma \| dz \| = \int_\gamma \| z'(\theta) \| d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \Rightarrow L_\gamma = 4\pi$

$\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \| \le ML_\gamma = \frac{e^2}{2}(4\pi) = 2\pi e^2 \qquad \therefore\ \| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \| \le 2\pi e^2$

(12) Probar que: $\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \| \le 8\pi$ donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \| z - 1 \| = 2\}$

Desarrollo

Como $\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \| \le ML_\gamma$ donde $\| f(z) \| \le M$ y $L_\gamma = \int_\gamma \| dz \|$

$\| \frac{z+1}{z-1} \| = \frac{\| z+1 \|}{\| z-1 \|}$ de donde $\| f(z) \| = \| \frac{z+1}{z-1} \| \le M$

$\| z + 1 \| = \| z - 1 + 2 \| \le \| z - 1 \| + 2$, dividiendo entre $\| z - 1 \|$

$\frac{\| z+1 \|}{\| z-1 \|} \le \frac{\| z-1 \| + 2}{\| z-1 \|}$ como $\| z - 1 \| = 2$ entonces

$\| \frac{z+1}{z-1} \| = \frac{\| z+1 \|}{\| z-1 \|} \le \frac{\| z-1 \| + 2}{\| z-1 \|} = \frac{2+2}{2} = 2$ de donde

$\| \frac{z+1}{z-1} \| \le 2 = M \Rightarrow M = 2$

parametrizando la curva γ se tiene: $\gamma : z = z_0 + Re^{i\theta}$, donde $z_0 = 1$ y $R = 2$

$z(\theta) = 1 + 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta} \Rightarrow \| z'(\theta) \| = 2$

$$L_\gamma = \int_\gamma \| z'(\theta) \| \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 4\pi \text{, por lo tanto } \left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \le M L_\gamma = 4\pi(2) = 8\pi$$

$$\therefore \left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \le 8\pi$$

(13) Si $\| a \| \ne 0$ y $\gamma = \{z \in C / \| z \| = R\}$, probar que $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le \frac{2\pi R}{| R^2 - \| a \|^2 |}$

Desarrollo

Como $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le M.L_\gamma$ donde $\| f(z) \| \le M$ y $L_\gamma = \int_\gamma \| dz \|$

$$\| z-a \| \| z+a \| = \| z^2 - a^2 \| \ge \| z \|^2 - \| a \|^2$$

$$\frac{1}{\| z^2 - a^2 \|} \le \frac{1}{| \| z \|^2 - \| a \|^2 |} = \frac{1}{| R^2 - \| a \|^2 |} = M$$

$$L_\gamma = \int_\gamma dz = 2\pi R$$

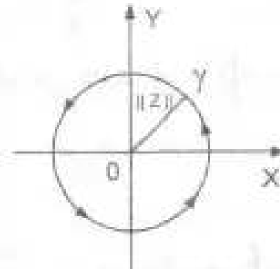
$$\therefore \oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le M.L_\gamma = \frac{2\pi R}{| R^2 - \| a \|^2 |}$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le \frac{2\pi R}{| R^2 - \| a \|^2 |}$$

(14) Si $\gamma = \{z \in C / \| z \| = R,\ R > 1\}$, verificar que: $\displaystyle\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| < 2\pi \frac{(\pi + \log R)}{R}$ y si $R \to \infty$, entonces la integral tiende a cero.

Desarrollo

Por la fórmula $\displaystyle\left\| \oint_\gamma f(z) dz \right\| \le \oint_\gamma \| f(z) \| \| dz \| \le M.L_\gamma$



parametrizando la curva γ

$$\gamma : z(\theta) = 2e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$z(\theta) = 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$$

$$\| z'(\theta) \| = 2$$

$$L_\gamma = \int_\gamma \| dz \| = \int_\gamma \| z'(\theta) \| \, d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \Rightarrow L_\gamma = 4\pi$$

$$\left\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right\| \le M L_\gamma = \frac{e^2}{2}(4\pi) = 2\pi e^2 \qquad \therefore \left\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right\| \le 2\pi e^2$$

(12) Probar que: $\displaystyle\left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \le 8\pi$ donde $\gamma = \{z \in C / \| z-1 \| = 2\}$

Desarrollo

Como $\displaystyle\left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \le M L_\gamma$ donde $\| f(z) \| \le M$ y $L_\gamma = \int_\gamma \| dz \|$

$\displaystyle\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| = \frac{\| z+1 \|}{\| z-1 \|}$ de donde $\displaystyle\| f(z) \| = \left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \le M$

$\| z+1 \| = \| z-1+2 \| \le \| z-1 \| + 2$, dividiendo entre $\| z-1 \|$

$\displaystyle\frac{\| z+1 \|}{\| z-1 \|} \le \frac{\| z-1 \| + 2}{\| z-1 \|}$ como $\| z-1 \| = 2$ entonces

$\displaystyle\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| = \frac{\| z+1 \|}{\| z-1 \|} \le \frac{\| z-1 \| + 2}{\| z-1 \|} = \frac{2+2}{2} = 2$ de donde

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \le 2 = M \Rightarrow M = 2$$

parametrizando la curva γ se tiene: $\gamma : z = z_0 + Re^{i\theta}$, donde $z_0 = 1$ y $R = 2$

$$z(\theta) = 1 + 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta} \Rightarrow \| z'(\theta) \| = 2$$

$$L_\gamma = \int_\gamma \| z'(\theta) \| \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 4\pi \text{, por lo tanto } \left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \le M L_\gamma = 4\pi(2) = 8\pi$$

$$\therefore \left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \le 8\pi$$

(13) Si $\| a \| \ne 0$ y $\gamma = \{z \in C / \| z \| = R\}$, probar que $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le \frac{2\pi R}{| R^2 - \| a \|^2 |}$

Desarrollo

Como $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le M.L_\gamma$ donde $\| f(z) \| \le M$ y $L_\gamma = \int_\gamma \| dz \|$

$$\| z-a \| \| z+a \| = \| z^2 - a^2 \| \ge \| z \|^2 - \| a \|^2$$

$$\frac{1}{\| z^2 - a^2 \|} \le \frac{1}{| \| z \|^2 - \| a \|^2 |} = \frac{1}{| R^2 - \| a \|^2 |} = M$$

$$L_\gamma = \int_\gamma dz = 2\pi R$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le M.L_\gamma = \frac{2\pi R}{| R^2 - \| a \|^2 |}$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{dz}{\| z-a \| \| z+a \|} \le \frac{2\pi R}{| R^2 - \| a \|^2 |}$$

(14) Si $\gamma = \{z \in C / \| z \| = R,\ R > 1\}$, verificar que: $\displaystyle\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| < 2\pi \frac{(\pi + \log R)}{R}$ y si $R \to \infty$, entonces la integral tiende a cero.

Desarrollo

Por la fórmula $\displaystyle\left\| \oint_\gamma f(z) dz \right\| \le \oint_\gamma \| f(z) \| \| dz \| \le M.L_\gamma$

Donde $\displaystyle\oint_\gamma \| dz \| = L_\gamma$ = longitud de la curva y $\| f(z) \| \le M,\ \forall z \in \gamma$

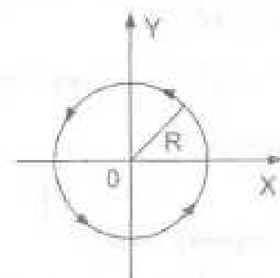
Entonces $\log z = \log \| z \| + (\theta + 2k\pi)i,\ \theta \in \langle -\pi, \pi],\ \| z \| = R$

Si $k = 0$, $\log z = \log \| z \| + \theta i$ (logaritmo principal)

$\| \log z \| = \| \log R + \theta i \| < \log R + \| \theta \|$ por que $R > 1$

$\| \log z \| < \log R + \pi$ (como $\theta \in \langle -\pi, \pi]$, el máximo valor de $\theta = \pi$)

$$\left\| \frac{\log z}{z^2} \right\| = \frac{\| \log z \|}{\| z \|^2} < \frac{\log R + \pi}{R^2} \Rightarrow \left\| \frac{\log z}{z^2} \right\| < \frac{\log R + \pi}{R^2}$$



$$L_\gamma = 2\pi R$$

$$z(t) = Re^{it} \Rightarrow z'(t) = Rie^{it}$$

$$\| z'(t) \| = R$$

$$L_\gamma = \int_\gamma \| dz \| = \int_\gamma R\, dt = 2\pi R$$

En el problema $\displaystyle\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| \le M.L$

$$\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| < \frac{\log R + \pi}{R^2} 2\pi R \qquad \therefore \left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| < 2\pi\left(\frac{\log R + \pi}{R}\right)$$

Si $R \to \infty$, $\displaystyle\lim_{R \to \infty} 2\pi\left(\frac{\log R + \pi}{R}\right) = 0 \qquad \therefore \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz = 0$

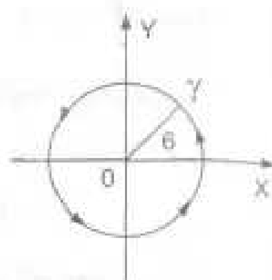
(15) Calcular $\displaystyle\oint_\gamma [(z^2 + 6iz) d\bar{z} + \bar{z}^{-1} dz]$ si $\gamma : z\bar{z} = 36$

Desarrollo

$z\bar{z} = 36 \Rightarrow \| z \|^2 = 36 \Rightarrow \| z \| = 6$

$\gamma = \{z \in C / \| z \| = 6\}$

cuya parametrización es:



$\gamma: z(\theta) = 6e^{i\theta} = 6(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$

$\gamma: z(\theta) = 6(\cos\theta + i\,sen\,\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$

$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy,\ dz = dx + i\,dy,\ d\bar{z} = dx - idy$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,\ 6iz = 6ix - 6y,\ \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$

sustituyendo en la integral se tiene:

$$\oint_\gamma [(z^2 + 6iz)d\bar{z} + \bar{z}^2 dz] = \oint_\gamma (x^2 - y^2 + 2xyi + 6xi - 6y)(dx - idy)$$

$$+ (x^2 - y^2 - 2xyi)(dx + idy)$$

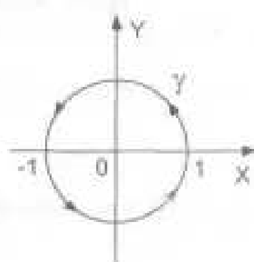
$$= \oint_\gamma 2(x^2 - y^2 + 3xi - 3y)dx + (4xy - 6x + 6iy)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} [2(36\cos^2 6\theta - 36sen^2\theta + 18\cos\theta i - 18sen\theta)(-6sen\theta)$$

$$+ (24\cos\theta.6sen\theta - 36\cos\theta + 36isen\theta)6\cos\theta]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (432sen\theta + 216)d\theta = [-432\cos\theta + 216\theta] \Big/_0^{2\pi} = 432\pi$$

(16) Calcular la integral $\oint_\gamma Re(z^8 + 1)dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 1\}$



Desarrollo

$\gamma: z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$dz = ie^{i\theta}d\theta$

se sabe $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$$Re(z^8 + 1) = \frac{1}{2}[z^8 + 1 + \bar{z}^8 + 1] = \frac{1}{2}[z^8 + 2 + \bar{z}^8]$$

$$\oint_\gamma Re(z^8 + 1)dz = \frac{1}{2}\oint_\gamma (z^8 + 2 + \bar{z}^8)dz = \underbrace{\frac{1}{2}\oint_\gamma (z^8 + 2)dz}_{0} + \frac{1}{2}\oint_\gamma \bar{z}^8 dz \quad \dots (1)$$

como $z^8 + 2$ es analítica entonces $\oint_\gamma (z^8 + 2)dz = 0$ ... (2)

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\oint_\gamma Re(z^8 + 1)dz = \frac{1}{2}\oint_\gamma z^{-8}dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-8i\theta}.ie^{i\theta}d\theta = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} e^{-7i\theta}d\theta = \frac{i}{2}(-\frac{e^{-7i\theta}}{7i}) \Big/_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{14}[e^{-14\pi i} - 1] = -\frac{1}{14}[\cos 14\pi - isen 14\pi - 1] = -\frac{1}{14}[1 - 0 - 1] = 0$$

$\therefore \oint_\gamma Re(z^8 + 1)dz = 0$

(17) Calcular la integral $\oint_\gamma Im(z^4)dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z - (1 + i) \| = 2\}$

Desarrollo

Aplicando la propiedad: $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $Im(z^4) = \frac{z^4 - \bar{z}^4}{2i}$

$$\oint_\gamma Im(z^4)dz = \underbrace{\oint_\gamma \frac{z^4}{2i}dz}_{0} - \frac{1}{2i}\oint_\gamma \bar{z}^4 dz \quad \dots (1)$$

como $f(z) = z^4$ es analítica entonces $\oint_\gamma z^4 dz = 0$ ... (2)

Luego reemplazando (2) en (1) se tiene: $\oint_\gamma Im(z^4)dz = -\frac{1}{2i}\oint_\gamma \bar{z}^4 dz$

Como $\gamma: \| z - (1 + i) \| = 2 \Rightarrow \gamma: z = (1 + i) + 2e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$$dz = 2ie^{i\theta}d\theta$$

$z = 2e^{i\theta} + (1 + i) = 2e^{i\theta} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow \bar{z} = 2e^{-i\theta} + \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$$\oint_\gamma Im(z^4)dz = -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} (2e^{-i\theta} + \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^4 2ie^{i\theta}d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} [16e^{-4i\theta} + 16\sqrt{2}e^{-3i\theta}e^{-\frac{\pi}{4}i} + 24e^{-2i\theta}e^{-\frac{\pi}{2}i} + 8\sqrt{2}e^{-i\theta}e^{-\frac{3\pi}{4}i} + 4e^{-\pi i}]e^{i\theta}d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} [\underbrace{16e^{-3i\theta}}_{0} + \underbrace{16\sqrt{2}e^{-2i\theta}e^{-\frac{\pi}{4}i}}_{0} + \underbrace{24e^{-i\theta}e^{-\frac{\pi}{2}i}}_{0} + 8\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} + \underbrace{4e^{i\theta}e^{-\pi i}}_{0}]d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} 8\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}d\theta = -8\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\theta \Big/_0^{2\pi}$$

$$= -16\sqrt{2}\pi e^{-\frac{3\pi}{4}i} = -8\sqrt{2}\pi[\cos\frac{3\pi}{4} - isen\frac{3\pi}{4}]$$

$$= -16\sqrt{2}\pi[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}] = 16\pi(1 + i)$$

(18) Sea γ el arco del círculo $\| z \| = 2$, que va de $z = 2$ a $z = 2i$ en el primer cuadrante. Sin calcular la integral. Probar que: $\| \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1} \| \le \frac{\pi}{3}$

es decir: $\| z^2 - 1 \| \ge 3 \Rightarrow \| \frac{1}{z^2 - 1} \| \le \frac{1}{3}$ ... (2)

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $\| \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1} \| \le \frac{1}{3}\oint_\gamma dz = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \| \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1} \| \le \frac{\pi}{3}$

(19) Si γ es una curva suave $x = x(t)$, $y = y(t)$ para $a \le t \le b$ y si f es continua sobre γ, demuestre que $\int_\gamma f(x, y)dx$ existe y $\int_\gamma f(x, y)dx = \int_\gamma f(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt$

Desarrollo

Sea $P_\pi = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$ y $Q_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ una ampliación de la partición de P_n, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)\Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} f(x_j(t), y_j(t))\Delta x_j(t) \quad \dots (1)$$

como γ es una curva suave, del teorema del valor medio se tiene:

$$\Delta x_j(t) = \frac{dx(t_j)}{dt}\Delta t_j \quad \dots (2)$$

donde t_j es algún valor de t en $[t_{j-1}, t_j]$, por lo tanto de (1) y (2) se tiene:

Desarrollo

Se conoce que: $\| \int_\gamma f(z)dz \| \le \int_\gamma \| f(z) \| dz$

En el problema planteado se tiene: $\| \int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} \| \le \int_\gamma \| \frac{1}{z^2-1} \| dz$ ... (1)

como $\| z^2-1 \| \ge \| \|z\|^2 - \|1\| \| = |2^2-1| = 3$

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j,y_j)\Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} f(x(t_j),y(t_j))\frac{dx(t_j)}{dt}\Delta t_j$$

ahora tomamos límite cuando $\| P_n \| \to 0$

$$\lim_{\|P_n\|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j,y_j)\Delta x_j = \lim_{\|P_n\|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x(t_j),y(t_j))\frac{dx(t_j)}{dt}\Delta t_j$$

por definición de la integral de Riemann $\int_\gamma f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt$

donde la existencia de esta integral esta asegurada puesto que f(x(t), y(t)) y $\frac{dx(t)}{dt}$ son ambas continuas en [a,b] y $t_j, t_j \in [t_{j-1}, t_j]$ y con esto está segura la existencia de la segunda integral.

(20) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral de línea $\oint_\gamma[(3x^2e^y - x^2y - \frac{y^3}{3})dx + (x^3e^y+\cos y)dy]$ alrededor de la circunferencia $x^2+y^2=1$ en sentido contrario al movimiento de la manecillas del reloj.

Desarrollo

Como $\oint_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint_R (\frac{\partial Q(X,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dx\,dy$

$\oint_\gamma (3x^2e^y - x^2y - \frac{y^3}{3})dx + (x^3e^y+\cos y)dy$

$$= \iint_R [\frac{\partial}{\partial x}(x^3e^y+\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2e^y - x^2y-\frac{y^3}{3})]dx\,dy$$

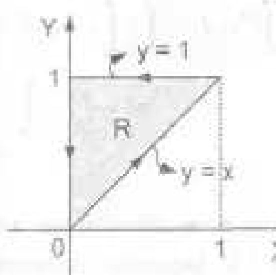
$$= \iint_R (3x^2e^y - 3x^2e^y + x^2+y^2)dx\,dy = \iint_R (x^2+y^2)dx\,dy$$

x = r cos θ, y = r sen θ $\qquad = \int_0^{2\pi}(\int_0^1 r^3 dr)d\theta$

dx dy = r dr dθ $\qquad = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4} = \frac{\pi}{2}$

(21) Aplicando el teorema de Green, calcular la integral de línea $\oint_\gamma(\frac{2}{3}xy^3 - x^2y)dx + x^2y^2dy$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la frontera del triángulo cuyos vértices son (0,0), (0,1), (1,1)

Desarrollo



$$\oint_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint_R (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dx\,dy$$

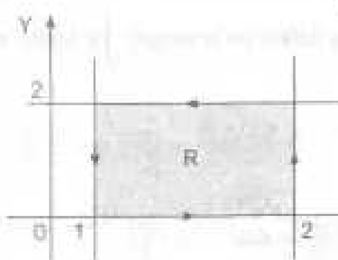
$$\oint_\gamma (\frac{2}{3}xy^3 - x^2y)dx + x^2y^2dy = \iint_R[\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{2}{3}xy^3 - x^2y)]dx\,dy$$

$$= \iint_R (2xy^2 - 2xy^2 + x^2)dx\,dy = \iint_R x^2dx\,dy = \int_0^1(\int_x^1 x^2dy)dx$$

$$= \int_0^1 x^2y \Big/_x^1 dx = \int_0^1 (x^2-x^3)dx = (\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})\Big/_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

(22) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral curvilínea $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$, donde γ es el contorno del rectángulo dado por $1\le x\le 4$, $0\le y\le 2$

Desarrollo



$P(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$Q(x,y) = y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]$

$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy = \iint_R(\frac{\partial Q(x,y)}{dx} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dx\,dy$$

$$= \iint_R (y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dx\,dy = \iint_R y^2dx\,dy = \int_1^4(\int_0^2 y^2dy)dx$$

$$= \int_1^4 \frac{y^3}{3}\Big/_0^2 dx = \int_1^4 \frac{8}{3}dx = \frac{8}{3}(2-1) = \frac{8}{3}$$

(23) Sea F(z) = u(x,y) + i v(x,y) una función cualquiera de la variable compleja z = x + iy definida a lo largo del contorno γ : z = z(t); a ≤ t ≤ b. Demuestre que si existen las integrales de línea del lado derecho, entonces $\int_\gamma F(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx+udy$

Desarrollo

Sea $P_n = \{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$, una partición de [a,b] y $Q_n = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ una ampliación de la partición P_n entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} F(z_j)\Delta z_j = \sum_{j=1}^{n} [u(x_j,y_j)+iv(x_j,y_j)][\Delta x_j + \Delta y_j]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}[u(x_j,y_j)\Delta x_j - v(x_j,y_j)\Delta y_j] + i\sum_{j=1}^{n}[v(x_j,y_j)\Delta x_j + u(x_j,y_j)\Delta y_j]$$

(24) Sea γ el círculo $\|z-z_0\| = R$, en sentido contrario del las agujas del reloj, usar la representación paramétrica $z = z_0 + Re^{i\theta}$, $-\pi\le\theta\le\pi$, para deducir la siguiente fórmula: $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

Desarrollo

γ: $\|z-z_0\|=R$ entonces $\gamma(\theta) = z_0+Re^{i\theta}$, $-\pi\le\theta\le\pi$

como $F(z) = \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow F(\gamma(\theta)) = \frac{1}{z_0+Re^{i\theta}-z_0} = \frac{1}{Re^{i\theta}}$ además $\gamma'(\theta) = Rie^{i\theta}$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta}}d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi}d\theta = 2\pi i$$

(25) Verificar el teorema del Cauchy para la función $F(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$, si γ es la elipse $\|z-3i\| + \|z+3i\| = 20$

Desarrollo

Por demostrar que $\int_\gamma F(z)dz = 0$

$$= \sum_{i=1}^{n}[u(x_i,y_i)\Delta x_i - v(x_i,y_i)\Delta y_i] + i\sum_{i=1}^{n}[v(x_i,y_i)\Delta x_i + u(x_i,y_i)\Delta y_i]$$

como las integrales de línea $\int_\gamma u\,dx - v\,dy$ e $\int_\gamma v\,dx + u\,dy$ existen entonces el límite del lado derecho existe cuando $\| P_n \| \to 0$ y es por definición la integral $\int_\gamma F(z)dz$, es decir:

$$\lim_{\|P_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(z_i)\Delta z_i = \lim_{\|P_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[u(x_i,y_i)\Delta x_i - v(x_i,y_i)\Delta y_i] +$$

$$+i\lim_{\|P_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[v(x_i,y_i)\Delta x_i + u(x_i,y_i)\Delta y_i]$$

$$\int_\gamma F(z)dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

Como γ es una elipse se cumple el teorema de Green

$F(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$, siendo $z = x + iy$

$$F(z) = \underbrace{(x^3 - 3xy^2 - 2xy - 5x)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(3x^2y - y^3 + x^2 - y^2 - 5y + 2)}_{v(x,y)}$$

$$\oint_\gamma F(z)dz = \oint_\gamma (u + iv)(dx + i\,dy)$$

$$= \oint_\gamma (udx - vdy) + i\oint_\gamma (vdx + udy) \quad \text{(por Teorema de Green)}$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy \quad \text{... (1)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 2y - 5, & \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 2y - 5 \end{array}\right\} \quad \text{... (2)}$$

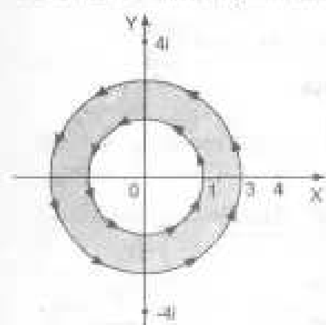
ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$\oint_\gamma F(z)dz = -\iint_R [(-6xy - 2x) + (6xy + 2x)]dx\,dy +$$

$$+i\iint_R [(3x^2 - 3y^2 - 2y - 5) - (3x^2 - 3y^2 - 2y - 5)]dx\,dy$$

$$= -\iint_R 0\,dx\,dy + i\iint_R 0\,dx\,dy = 0$$

(26) Calcular la integral $\int_\gamma \frac{(\cosh z + sen z)^4}{z^4(z^2 + 16)}dz$, donde γ es la frontera de $\| z \| < 3$ orientada en sentido antihorario junto con la circunferencia $\| z \| = 1$ orientada en sentido horario.



Desarrollo

F(z) no es analítica en $z = 0$, $z = \pm 4i$ pero como no están en el interior de la región que encierra γ entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{(\cosh z + sen z)^4}{z^4(z^2 + 16)}dz = 0$$

(27) Si $G(z_0) = \int_\gamma \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0}dz$, $z_0 = 2$, calcular G(2) donde $\gamma = \{z \in C \,/\, \| z \| = 3\}$ es orientada en sentido positivo.

Desarrollo

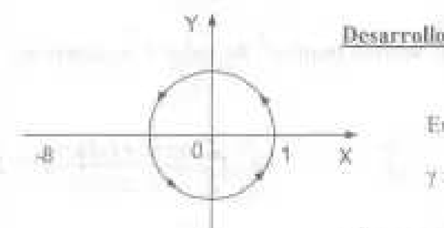
Por el teorema Cauchy para las integrales se tiene:

$G(z_0) = 2\pi i\, f(z_0) = \int_\gamma \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0}dz$, donde

$f(z_0) = 2z_0^2 - z_0 - 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 2 - 2 = 4$

$$\therefore \int_\gamma \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0}dz = 2\pi i\, f(2) = 8\pi i$$

(28) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2 + 8z}$, donde γ: $\| z \| = 1$ esta orientada en sentido antihorario.



Desarrollo

En $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{1}{z + 8}$ es analítica en γ : $\| z \| = 1$ y $z_0 = 0$ esta en el interior de γ

$$\text{Luego } \oint_\gamma \frac{dz}{z^2 + 8z} = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z+8}dz}{z} = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i\, f(z)$$

Como $f(z) = \frac{1}{z + 8} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{8}$ $\qquad \therefore \oint_\gamma \frac{dz}{z^2 + 8z} = 2\pi i\, f(0) = \frac{\pi i}{4}$

(29) Calcular $\oint_\gamma \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^6}dz$, donde γ : $\| z \| = 3$

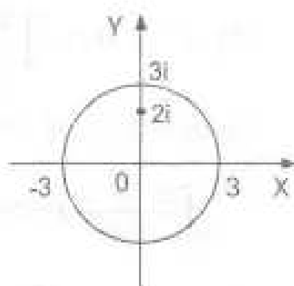
Desarrollo

Aplicando la fórmula de la integral de Cauchy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \Rightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$$\oint_\gamma \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^6}dz = \frac{2\pi i}{5!}f^{v}(2i)$$

donde $f(z) = z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1$



$f'(z) = 6z^5 + 16z^3 - 4z \Rightarrow f''(z) = 30z^4 + 48z^2 - 4$

$f'''(z) = 120z^3 + 96z \Rightarrow f^{iv}(z) = 360z^2 + 96$

$f^{v}(2i) = 360(2i)^2 + 96 = -1440 + 96 = -1344$

$$\oint_\gamma \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^6} = \frac{2\pi i}{5}(-1344) = -\frac{2688}{5}\pi i$$

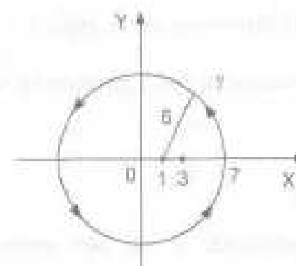
(30) Si γ es una circunferencia en el sentido positivo, de radio 1 y centro en $z_0 = 0$, demuestre que:

(31) Evaluar la integral $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z - 3)^{420}}$, donde

a) $\gamma = \{z \in C \,/\, \| z - 1 \| = 6\}$ $\qquad$ b) $\gamma = \{z \in C \,/\, \| z \| = 4\}$

Desarrollo

a)



γ : $\| z - 1 \| = 6$, $z_0 = 3$ está dentro de γ

$$\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$f(z) = e^z \Rightarrow f^{(420)}(z) = e^z$

$f^{(420)}(3) = e^3$

a) $\oint_{\gamma} \frac{e^{z}\cos z}{z} dz = 2\pi i$ b) $\oint_{\gamma} \frac{a\,\text{sen}z + b\cos z}{z} dz = 2\pi ib$

Desarrollo

a) Aplicando la integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z}\cos z}{z} dz = 2\pi i\, f(0) \quad \text{donde } z = 0 \text{ esta en el interior de } \gamma$$

$f(z) = e^{z}\cos z \Rightarrow f(0) = 1$ $\therefore \oint_{\gamma} \frac{e^{z}\cos z}{z} dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i$

b) Se conoce que $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i\, f(z_0)$ donde $z_0 = 0$

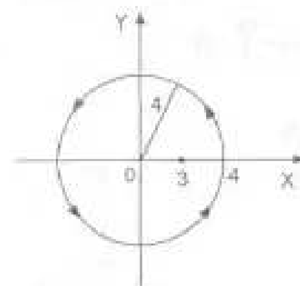
$f(z) = a \text{ sen } z + b \cos z \Rightarrow f(0) = b$

$$\oint_{\gamma} \frac{a\,\text{sen}z + b\cos z}{z} dz = \oint_{\gamma} \frac{a\,\text{sen}z + b\cos z}{z - 0} dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i b = 2\pi b i$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{a\,\text{sen}z + b\cos z}{z} dz = 2\pi bi$$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z} dz}{(z-3)^{450}} = \frac{2\pi i}{449!} f^{(449)}(3) = \frac{2\pi i e^{3}}{449!}$$

b)

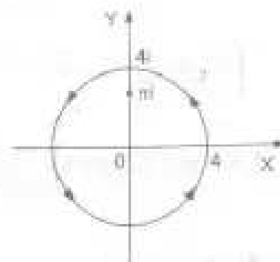


$\gamma : \| z \| = 4$, $z_0 = 3$ está dentro de γ

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z} dz}{(z-3)^{450}} = \frac{2\pi i\, f^{(449)}(3)}{449!} = \frac{2\pi i e^{3}}{449!}$$

(32) Evaluar la integral $\oint_{\gamma} \frac{\text{senh}^2 z + \cos z}{z - \pi i} dz$, donde $\gamma : \| z \| = 4$

Desarrollo



$z_0 = \pi i$ esta en el interior de γ: $\| z \| = 4$ y f(z)

y $f(z) = \text{senh}^2 z + \cos z$, entonces

$$\oint_{\gamma} \frac{\text{senh}^2 z + \cos z}{z - \pi i} dz = 2\pi i\, f(\pi i)$$

$f(z) = \text{senh}^2 i + \cos z \Rightarrow f(\pi i) = \text{senh}^2 \pi i + \cos \pi i = 0 + \cos \pi i = \cosh \pi$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{\text{senh}^2 z + \cos z}{z - \pi i} dz = 2\pi i f(\pi i) = 2\pi i \cosh \pi$$

(33) Comprobar que la integral $\int_{\gamma} \sqrt[3]{z}\, dz$ sobre la circunferencia de radio 1 y centro en el origen, a partir del punto de argumento α, es función de dicho argumento y calcular dicha integral, caso particular: $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

Desarrollo

Sea $\gamma : z = e^{i\theta}$ la circunferencia parametrizada donde $dz = ie^{i\theta} d\theta$, entonces:

$$\int_{\gamma} \sqrt[3]{z}\, dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{\frac{i\theta}{3}} . ie^{i\theta} d\theta = i\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{\frac{4}{3}i\theta} d\theta = i[\frac{4}{3i} e^{\frac{4}{3}i\theta}] \Big/_{\alpha}^{\alpha+2\pi} = \frac{4}{3}[e^{\frac{4i}{3}(\alpha+2\pi)} - e^{\frac{4}{3}i\alpha}]$$

$$= \frac{3}{4} e^{\frac{4}{3}i\alpha}(e^{\frac{8i\pi}{3}} - 1) = \frac{3}{4} e^{\frac{4}{3}i\alpha}(\cos\frac{8\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{8\pi}{3} - 1)$$

$$= \frac{3}{4} e^{\frac{4}{3}i\alpha}(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \frac{3}{8} e^{\frac{4}{3}\alpha i}(-3 + i\sqrt{3})$$

$$\int_{\gamma} \sqrt[3]{z}\, dz = \frac{3}{8} e^{\frac{4}{3}\alpha i}(-3 + i\sqrt{3})$$

Si $\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow e^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{2} i} = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\,\text{sen} 2\pi = 1$

$$\int_{\gamma} \sqrt[3]{z}\, dz = \frac{3}{8}(-3 + i\sqrt{3})$$

(34) Calcular la integral $\oint_{\gamma} \frac{\cos z\, dz}{z^3 + z}$ sobre

a) $\gamma : \| z \| = 2$ b) $\gamma : \| z \| = \frac{1}{2}$ c) $\gamma : \| z - \frac{i}{2} \| = 1$

Desarrollo

a)



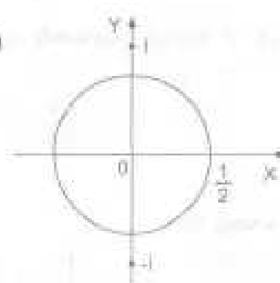
$$\frac{1}{z^3 + z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z\, dz}{z^3 + z} = \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz - \frac{1}{2}\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz - \frac{1}{2}\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z-i} dz$$

$$= 2\pi i[\cos 0 - \frac{1}{2}\cos(-i) - \frac{1}{2}\cos i]$$

$$= 2\pi i[1 - \frac{1}{2}(2\cos i)] = 2\pi i\,(1 - \cos i) = 2\pi i\,(1 - \cosh 1)$$

b)

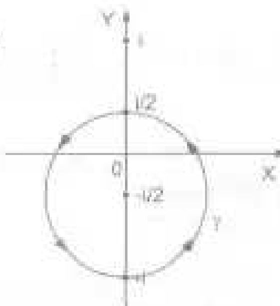


$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz = \oint_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z^2+1}}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

donde $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 1} \Rightarrow f(0) = 1$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz = 2\pi i$$

c)



$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz = \oint_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z+i}}{z(z-i)} dz$$

$f(z) = \frac{\cos z}{z + i}$ es analítica sobre y en el interior de $\gamma : \| z - \frac{i}{2} \| = 1$

$$\frac{1}{z(z-i)} = i(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-i})$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz = i[\oint_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z+i}}{z} dz - \oint_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z+i}}{z-i} dz] = i[2\pi i \frac{\cos 0}{0+i} - 2\pi i \frac{\cos i}{i+i}]$$

$$= i[2\pi - \pi\cos i] = 2i\pi[1 - \frac{\cosh 1}{2}]$$

(35) Si γ es el rectángulo: x = ± 4; y = ± 4, descrita en dirección positiva, calcular:

a) $\oint_{\gamma} \frac{e^{z}}{z^{n}} dz$ b) $\oint_{\gamma} \frac{\text{senh} 2z}{(z - \frac{\pi}{4})^{4}} dz$

Desarrollo

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos^2 tz}{z^3} dz = \oint_{\gamma} \frac{\cos^2 tz}{(z-0)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0), \text{ de donde}$$

$f(z) = \cos^2 tz \Rightarrow f'(z) = -2t\cos tz \text{ sen } tz = -t \text{ sen } 2tz$

$f''(z) = -2t^2 \cos 2tz \Rightarrow f''(0) = -2t^2$

Aplicando la integral $\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

a) $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^6} = \oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-0)^6} = \frac{2\pi i}{5!} f^{v}(0)$, donde

$f(z)=e^z \Rightarrow f'(z)=e^z \Rightarrow f''(z)=e^z \Rightarrow f^{v}(z)=e^z$ de donde $f^{v}(0)=1$

$$\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^6} = \frac{2\pi i}{5!} f^{v}(0) = \frac{2\pi i}{120}(1) = \frac{\pi i}{60}$$

b) $\oint_\gamma \frac{senh 2z\, dz}{(z-\frac{\pi}{4})^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(\frac{\pi}{4})$, de donde f(z) = senh 2z

$f'(z)=2\cosh 2z \Rightarrow f''(z)=4senh 2z$

$f'''(z)=8\cosh 2z \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{4})=8\cosh\frac{\pi}{2}$

$$\oint_\gamma \frac{senh 2z\, dz}{(z-\frac{\pi}{4})^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\pi i}{6}(8\cosh\frac{\pi}{2}) = \frac{8\pi i}{3}\cosh\frac{\pi}{2}$$

36) Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma \frac{\cos^2 tz}{z^3}dz$, donde γ es el círculo $|z|=1$ y $t>0$

Desarrollo

Como $\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$, entonces

$$\oint_\gamma \frac{\cos^2 tz}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i(-2t^2) = -2\pi t^2 i$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{\cos^2 tz}{z^3}dz = -2\pi t^2 i$$

37) Si $t>0$ y γ es una curva simple cerrada alrededor de $z=-1$ probar que $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{ze^{zt}dz}{(z+1)^3} = (t-\frac{t^2}{2})e^{-t}$

Desarrollo

Como $\oint_\gamma \frac{ze^{zt}dz}{(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(-1)$ donde $f(z)=ze^{zt}$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{ze^{zt}dz}{(z+1)^3} = \frac{f''(-1)}{2!} = \frac{f''(-1)}{2} \quad \text{... (1)}$$

$f(z)=ze^{zt} \Rightarrow f'(z)=e^{zt}+zte^{zt} \Rightarrow f''(z)=te^{zt}+te^{zt}+zt^2e^{zt}$

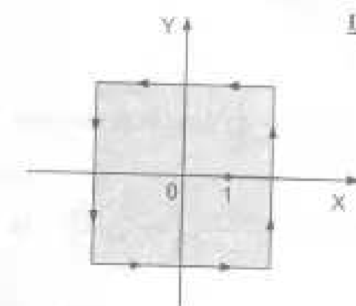
$f''(z)=2te^{zt}+zt^2e^{zt} \Rightarrow f''(-1)=(2t-t^2)e^{-t}$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{ze^{zt}dz}{(z+1)^3} = \frac{f''(-1)}{2} = \frac{1}{2}(2t-t^2)e^{-t} = (t-\frac{t^2}{2})e^{-t}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{ze^{zt}dz}{(z+1)^3} = (t-\frac{t^2}{2})e^{-t}$$

38) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{2+3sen\pi z}{z(z-1)^2}dz$, donde γ es el cuadrado con vértice en $3+3i$, $-3+3i$, $-3-3i$, $3-3i$.



Desarrollo

Aplicando la integral

$$\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{(z-1)^2}$$

$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A(z-1)^2+Bz(z-1)+Cz}{z(z-1)^2}$ de donde $1=A(z^2-2z+1)+B(z^2)-Bz+Cz$

$1=(A+B)z^2+(C-2A-B)z+A$, por identidad

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B=0 \\ A=1 \end{cases} \text{ resolviendo } \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$

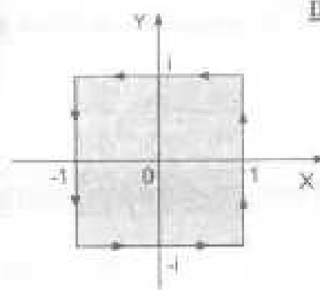
$$\oint_\gamma \frac{2+3sen\pi z}{z(z-1)^2}dz = \oint_\gamma \frac{2+3sen\pi z}{z}dz - \oint_\gamma \frac{2+3sen\pi z}{z-1}dz + \oint_\gamma \frac{2+3sen\pi z}{(z-1)^2}dz$$

$$= 2\pi i(2) - 2\pi i(2) + 2\pi i(3\pi\cos\pi) = 4\pi i - 4\pi i - 6\pi^2 i = -6\pi^2 i$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{2+3sen\pi z}{z(z-1)^2}dz = -6\pi^2 i$$

) Calcular la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)}dz$, $t>0$, alrededor del cuadrado con vértice en $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

Desarrollo



Aplicando la fórmula de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-i}$$

$$= \frac{A(z+i)(z-i)+Bz(z-i)+Cz(z+i)}{z(z+i)(z-i)}$$

$1=A(z^2+1)+Bz^2-Biz+Cz^2+Ciz$ de donde $1=(A+B+C)z^2+(C-B)iz+A$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ C-B=0 \\ A=1 \end{cases} \text{ resolviendo } \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z}-\frac{1}{2(z+i)}-\frac{1}{2(z-i)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z(z^2+1)} = \frac{1}{2\pi i}[\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z} - \frac{1}{2}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z+i} - \frac{1}{2}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z-i}]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}[2\pi i(e^0) - \frac{1}{2}2\pi i e^{-it} - \frac{1}{2}2\pi i e^{it}] = \frac{2\pi i}{2\pi i}[1-\frac{1}{2}e^{-it}-\frac{1}{2}e^{it}]$$

$$= 1-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = 1+\cos t$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z(z^2+1)} = 1-\cos t$$

(10) Probar que si la función $g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{s-z}$ es analítica en todo punto interior a γ entonces: $g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$

Desarrollo

Si $z \wedge z+h$ están en γ, tenemos que:

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{s-(z+h)}-\frac{1}{s-z}\right)f(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{1}{h}\left(\frac{s-z-s+z+h}{(s-(z+h))(s-z))}\right)f(s)ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{(s-z-h)(s-h)}\right)f(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-h)} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{1}{(s-z-h)(s-h)}=\frac{1}{(s-z)^2}+\frac{h}{(s-z-h)(s-z)^2} \qquad \text{... (2)}$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z)^2}+\frac{h}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)^2}$$

ahora debemos demostrar que: $\frac{h}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)^2}\to 0$, cuando $h\to 0$

como $f(s)$ es analítica en γ podemos hallar un número positivo M / $\| f(s) \| < M$ y sea L la longitud de γ, entonces: $\| s-h-z \| > | \, |s-z| - |h| \, | \geq d-|h|$

$$\left\| \frac{h}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)^2}\right\| \leq \frac{|h|ML}{(d-|h|)d^2},\quad 0<|h|<d$$

(d es la distancia más corta desde z hasta el punto s de γ)

entonces esta última fracción tiende a cero cuando h tiende a cero, luego:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(z-h)-g(z)}{h}=g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

$$\therefore \quad g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

5.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Calcular $\int_{\gamma}\| z \| \bar{z}\,dz$, donde γ es el contorno cerrado compuesto por la semicircunferencia superior $\| z \| = 1$ y por el segmento $-1 \leq x \leq 1$, $y=0$

(2) Evalúe $\int_{\gamma} e^{z}dz$, donde γ es la recta que une 1 con i.

(3) Evalúe $\int_{\gamma} e^{z}dz$, donde γ es la trayectoria en el primer cuadrante sobre el círculo $\| z \| = 1$ que une 1 con i

(4) Sean $\gamma_1 : z(t)=e^{it}$ y $\gamma_2 : z(t)=e^{-it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Evalúe $\int_{\gamma}\frac{dz}{z^2}$ a lo largo de cada curva.

(5) Calcular $\int_{\gamma}\frac{z+2}{z}dz$, donde la representación paramétrica de γ es:

a) El semicírculo $z=2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ b) El semicírculo $z=2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

c) El círculo $z=2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(6) Calcule $\int^{1+2i}\bar{z}^{2}dz$ integrando a lo largo del contorno $y=x^2+1$

(7) Evalúe $\int_{\gamma}\bar{z}\,dz$ a lo largo del contorno γ dado por.

a) El segmento de recta $x+y=1$ b) La parábola $y=(1-x)^2$

c) La porción del círculo $x^2+y^2=1$ que se encuentra en el primer cuadrante.

(8) Use una representación paramétrica para calcular la integral.

a) $\int^{-1}\frac{dz}{z}$, a lo largo de $\| z \| = 1$, en el semiplano superior

b) $\int^{-1}\frac{dz}{z}$, a lo largo de $\| z \| = 1$, en el semiplano inferior

c) $\int \bar{z}^{-4}dz$, a lo largo de $\| z \| = 1$, en el primer cuadrante

(9) Evalúe la integral $\int_{\gamma} f(z)dz$

a) $f(z)=iz^2$, γ es el segmento de recta de $1+2i$ a $3+i$

b) $f(z)=\| z \|^2$, γ es el segmento de recta de -4 a i

c) $f(z)=\text{sen}\, 2z$, γ es el segmento de recta de $-i$ a $-4i$

d) $f(z)=\text{Im}\,(z)$, γ es la circunferencia de radio 1 con centro en i, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

e) $f(z)=z\bar{z}$, γ: $z(t)=\text{sen}\, t + i\cos t$, $0 \leq t \leq \pi$

(10) Hallar el valor numérico de $\int_{\gamma}\bar{z}\,dz$ desde $z=0$ a $z=4+2i$ a lo largo de la curva γ: $z=z(t)=t^2+it$

(11) Hallar el valor numérico de $\int_{\gamma}(x^2-iy^2)dz$, a lo largo de:

a) γ: $y=2x^2$ desde $(1,1)$ a $(2,8)$

b) De las líneas rectas de $(1,1)$ a $(1,8)$ y luego de $(1,8)$ a $(2,8)$

(13) Hallar el valor numérico de $\oint_{\gamma}(5z^4-z^3+2)dz$ alrededor de:

a) El círculo $\| z \| = 1$ b) El cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

c) La curva $y=x^2$ desde $(0,0)$ a $(1,1)$ d) La curva $y^2=x$ desde $(1,1)$ a $(0,0)$

(14) Hallar el valor numérico de $\oint_{\gamma}\frac{dz}{z-2}$ alrededor de:

a) El círculo $\| z-2 \| = 4$ b) El círculo $\| z-1 \| = 5$

c) El cuadrado con vértices en $2 \pm 2i$, $-2 \pm 2i$.

(15) Hallar el valor numérico de $\oint_{\gamma}(x^2+iy^2)dS$ alrededor del círculo $\| z \| = 2$ donde S es la longitud de arco.

(16) Calcular la integral $\int_{\overline{AB}} f(z)dz$, donde $f(z)=(y+1)-xi$, siendo $\overline{AB}$ el segmento que une los puntos $z_A=1$ y $z_B=-i$

(17) Calcular la integral $\int_{\overline{AB}} f(z)dz$, donde $f(z)=x^2+iy^2$ siendo $\overline{AB}$ el segmento rectilíneo que une los puntos $A(1+i)$ y $B(2+3i)$.

(18) Calcular $\int_{\gamma}\bar{z}\,dz$, donde γ es el contorno cerrado $x=\cos t$, $y=\text{sen}\, t$.

(19) Calcular la integral de línea $\int_{\gamma}x^2y^3dx$, donde γ es el arco $z(t)=t(1+it^2)$, $0 \leq t \leq 1$

(20) Calcular $\int_{\gamma}\frac{1-(\frac{y}{b})^2}{x}dy$, donde γ es la elipse $z=a\cos t+ib\,\text{sen}\, t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(21) Calcular la integral de línea $\int_{\gamma}\frac{x}{y}dx$, donde γ es el arco $z=\text{sen}\, t+i\cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

(12) Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma \| z \|^2 dz$, alrededor del cuadrado con vértices en (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).

(22) Calcular la integral de línea $\int_\gamma \frac{1+xy}{y} dy$, donde γ es el arco, $z = t + it^2$, $1 \le t \le 2$

Calcular $\oint_\gamma (z^2 + 6iz)d\bar{z} + \bar{z}^2 dz$ si $\gamma: z\bar{z} = 36$

Calcular $\int_\gamma \text{Re}(z^8 - 1)dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 1\}$

Calcular $\int_\gamma \text{Im}(z)\bar{z} \| e^z \| dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 1\}$

Calcular $\int_\gamma \frac{4z-1}{z^2+3z+2} dz$ si $\gamma: \| z \| = 3$

Calcular $\int_\gamma e^{\bar{z}} dz$, donde γ es el parámetro del cuadrado de vértice $z = 0, z = i, z = 1, z = 1 + i$.

Calcular $\int_\gamma \frac{(z+4)dz}{z^2+2z+5}$, donde γ es dado por:

a) $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 1\}$

b) $\gamma = \{z \in C / \| z + 1 - i \| = 2\}$

Calcular $\int_\gamma \| z \|^4 \bar{z} dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 3\}$

Calcular la integral en forma analítica $\int_\gamma \bar{z}^2 dz$, donde γ es la frontera del triángulo de vértices (0,0), (2,0) y (2,2)

Calcular $\int_\gamma z^2 dz$, donde γ es la curva que une los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 4 + 6i$

Calcular $\int_\gamma z^n dz$, si $\gamma: z(t) = (1 + i)t$, $0 \le t \le 1$

Calcular $\int_\gamma (z - z_0)^n dz$, $z_0 \in C$, $n \in Z$, $\gamma: \| z - z_0 \| = R$

Calcular $\int_\gamma \| z \|^2 dz$, γ segmento que une $z = 1 + i$, $z = 6 + 7i$

Calcular $\oint_\gamma (x^2 + iy^2) \| dz \|$, si $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 2\}$

(36) Calcular la integral de línea $\oint_\gamma (2xy^2 + sen\, x)dx + (2x^2y + \cos y)dy$ donde γ es la elipse $z = a \cos t + ib\, sen\, t$, $0 \le t \le 2\pi$

(37) Calcular la integral de línea $\oint_\gamma y(x + \frac{xy}{2} + 1)dx + \frac{x^2}{2}(1 + y)dy$ donde γ es cualquier circunferencia de radio unitario.

(38) Si γ es cualquier contorno cerrado simple en el plano XY, y si f(x) y g(x) son funciones continuas arbitrarias. Demuestre que: $\oint_\gamma f(x)dx + g(y)dy = 0$

(39) Calcular la integral $\oint_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy$, donde γ es un cuadrado con vértices en (0,0), (2,0), (2,2), (0,2).

(40) Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma (5x + 6y - 3)dx + (3x - 4y + 2)dy$ alrededor de un triángulo en el plano XY con vértices en (0,0), (4,0) y (4,3)

(41) Sea γ una curva simple cerrada que limita una región que tiene área A, probar que: $A = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx$

(42) Calcular la integral $\oint_\gamma x^2y\,dx + (y^3 - xy^2)dy$, donde γ es la frontera de la región que encierra los círculos $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$

(43) Probar que $\oint_\gamma (y^2 \cos x - 2e^y)dx + (2y\,sen\,x - 2xe^y)dy = 0$ alrededor de cualquier curva simple cerrada γ.

(44) Demostrar que $\int_{(2,1)}^{(3,2)} (2xy^3 - 2y^2 - 6y)dx + (3x^2y^2 - 4xy - 6x)dy$ es independiente del camino que une los puntos (2,1) y (3,2) y hallar el valor numérico de la integral.

(45) Si γ es un curva simple cerrada que encierra una región de área A, probar que: $A = \frac{1}{2i}\oint_\gamma \bar{z}\,dz$

(46) Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma \bar{z}\,dz$ alrededor de:

a) El círculo $\| z - 2 \| = 3$

b) La elipse $\| z - 3 \| + \| z + 3 \| = 10$

c) El cuadrado con vértices en $z = 0, 2, 2i$ y $2 + 2i$.

(47) Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma (8\bar{z} + 3z)dz$ alrededor de la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(48) Sean $P(z,\bar{z})$ y $Q(z,\bar{z})$ continuas y con derivadas parciales continuas en una región R y sobre su frontera γ probar que: $\oint_\gamma P(z,\bar{z})dz + Q(z,\bar{z})d\bar{z} = 2i\iint_R (\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Q}{\partial z})dA$

(49) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z+2} dz$ si $\gamma: \| z \| = 1$

(50) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z+2} dz$ si $\gamma: \| z + 2 \| = 2$

(51) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{1+e^z}$ si $\gamma: \| z \| = \pi$

(52) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2 + bz + 1}$, $0 < b < 1$ si $\gamma: \| z \| = b$

(53) Calcular $\oint_\gamma \frac{senh\, z}{z^{n+1}}$, si $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 1\}$

(57) Evaluar $\oint_\gamma \frac{sen^6 z\, dz}{(z - \frac{\pi}{6})^3}$ si $\gamma: \| z \| = 1$

(58) Evaluar $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z^2 + \pi^2)^2}$ si $\gamma: \| z \| = 4$

(59) Evaluar $\oint_\gamma \frac{e^{-4z} dz}{(z+2)^{n+1}}$, si $\gamma = \{z \in C / \| z \| = 3\}$

(60) Sea γ el círculo $\| z \| = 4$ orientado positivamente. Hallar el valor de la integral $\oint_\gamma \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$

(61) Demostrar que si f es analítica en el interior y sobre un contorno cerrado simple γ y z_0 no esta sobre λ (z_0 esta en el interior), entonces: $\int_\lambda \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_\lambda \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$

(62) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{z^4 + 4}$ si $\gamma: \| z \| = 2$

(63) Determinar el valor numérico de $\oint_\gamma e^z dz$ alrededor del círculo $\| z \| = 1$ y demostrar que: $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + sen\,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} sen(\theta + sen\,\theta)d\theta = 0$

(64) Sea n un entero cualquiera, r un número real positivo y z_0 una constante compleja. Compruebe que si $r > 0$ $\oint_\gamma (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & , n \ne -1 \end{cases}$ donde $\gamma: \| z - z_0 \| = r$

54. Calcular $\oint_\gamma \frac{\log z}{z-\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)}$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z-\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)\|=1\}$ $\log z$ es la rama principal de $\log z$.

55. Calcular la integral en forma analítica $\oint_\gamma \frac{dz}{z^4-1}$ donde γ: $\|z\|=2$

56. Calcular $\oint_\gamma \frac{z^6+4z^4-2z^2+1}{(z-2i)^6}dz$, donde $\gamma = \{z \in C / -4 \le Re(z) \le 4 \ \wedge \ -4 \le Im(z) \le 4\}$

$2\pi i$, $n=-1$

65. Si n es un entero positivo, mostrar que:

$$\int_0^{2\pi} e^{sen(n\theta)}\cos(\theta-\cos(n\theta))d\theta = \int_0^{2\pi} e^{sen(n\theta)}sen(\theta-\cos n\theta)d\theta = 0$$

66. Si γ es el círculo $\|z\|=R$, mostrar que: $\lim_{R\to+\infty}\oint_\gamma \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}dz = 0$

67. Hacer uso del resultado de (66) para deducir que si γ_1 es el círculo $\|z-2\|=5$, entonces: $\oint_\gamma \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}dz = 0$

68. Evalúe la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{e^z(z-2)}$ alrededor $\gamma: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

69. Evalúe $\oint_\gamma \frac{\cos z + sen z}{(z^2+25)(z+1)}dz$ alrededor de $\gamma: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

70. $\oint_\gamma \frac{sen(e^z+\cos z)}{(z-1)^2(z+3)}dz$, alrededor de $\gamma: \frac{x^2}{2}+y^2=1$

71. Evalúe $\oint_\gamma \frac{e^{3z}dz}{(z-2i)(z-1)^2}$, alrededor de $\gamma: \frac{x^2}{2}+y^2=1$

72. Evalúe $\oint_\gamma \frac{\cosh z}{z^2+z+1}dz$, alrededor de $\gamma: (x-1)^2+(y-1)^2=1$

73. Evalúe $\oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z^{20}}dz$, alrededor de γ: $\|z\|=1$

74. Evalúe $\oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z^{21}}dz$, alrededor de γ: $\|z\|=1$

75. Evalúe $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{senh z}{z^2+z+1}dz$, alrededor de γ: $\|z-2i\|=2$

76. Evalúe $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos(senh z)dz}{z^2+z+1}$, alrededor de $\gamma: \|z-1-i\|=\frac{3}{2}$

77. Sea f(z) una función analítica, tanto sobre un contorno simple cerrado γ como en su interior, sean z_1 y z_2 dos puntos del interior de γ. Demuestre que: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{f(z_1)}{z_1-z_2}+\frac{f(z_2)}{z_2-z_1}$

78. Usar el ejercicio (77) para calcular las integrales:

a) $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos(z-1)dz}{(z-1)(z-2)}$, alrededor de γ: $\|z\|=3$

b) $\oint_\gamma \frac{dz}{e^z(z^2-1)}$, alrededor del cuadrado cuyos vértices están en $z=\pm 2$ y $z=\pm 2i$

79. Hallar el valor numérico de $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z-2}$ si γ es:

a) El círculo $\|z\|=3$ b) El círculo $\|z\|=1$

80. Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma \frac{sen 3z}{z+\frac{\pi}{2}}dz$, si γ: $\|z\|=5$

81. Hallar el valor numérico de $\oint_\gamma \frac{e^{3z}dz}{z-\pi i}$ si γ es:

a) El círculo $\|z-1\|=4$ b) La elipse $\|z-2\|+\|z+2\|=6$

82. Hallar el valor numérico de $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos \pi z}{z^2-1}dz$ alrededor de un triángulo con vértices en

a) $2\pm i$, $-2\pm i$ b) $-i$, $2-i$, $2+i$

83. Demostrar que $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2+1} = sen\,t$ si $t>0$ y γ es el círculo $\|z\|=2$

84. Hallar el valor numérico de $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}dz$, si $t>0$ y γ es el círculo $\|z\|=3$

85. Probar que: $f'''(a)=\frac{3!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^4}$ si γ es una curva simple cerrada alrededor de $\|z\|=a$ y f(z) es analítica en el interior y sobre γ.

86. Evalúe la integral $\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$, mediante la descomposición del integrando en fracciones parciales.

a) Si a y b están en el interior de γ.

b) Si a está en el interior de γ y b en el exterior.

c) Si b está en el interior de γ y a en el exterior.

87. Sea $\gamma: z(t)=2e^{it}+1$, $0\le t\le 2\pi$. Evalúe las integrales

a) $\oint_\gamma \frac{e^z}{z}dz$ b) $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z-1}dz$ c) $\oint_\gamma \frac{sen z}{z^2+1}dz$ d) $\oint_\gamma \frac{sen z}{z^2-z}dz$

e) $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz$ f) $\oint_\gamma \frac{\cos z}{(z-1)^2}dz$ g) $\oint_\gamma \frac{sen z}{(z^2+1)^2}dz$ h) $\oint_\gamma \frac{sen z}{(z-1)^3}dz$

88. Calcule $\int_{|z|=1} \frac{e^{kz^n}}{z}dz$, con n entero positivo ahora, muestre que

94. Evalúe la integral $\oint_\gamma \frac{z^2-\cos 3z}{(z-4i)^4}dz$, si γ es el triángulo con vértices 0, $-1-8i$, $1-8i$.

95. Calcular $\oint_\gamma \frac{senh(z^3)dz}{(z+1)^2}$ si γ: $\|z+1+2i\|=1$

96. Calcular $\oint_\gamma \frac{\cos(z)-sen(z)}{(z+i)^4}dz$, γ es cualquier curva cerrado simple que encierra a $-i$.

97. Calcular $\oint_\gamma \frac{2z\cosh z}{(z-2+4i)^2}dz$, γ es cualquier curva cerrada simple que no pasa por $2-4i$.

98. Calcular $\oint_\gamma \frac{(z+i)^2dz}{(z+3-2i)^5}$, γ es la circunferencia $\|z+2\|=5$

99. Evaluar $\oint_\gamma \frac{-(2+i)sen z^2}{(z+4)^2}dz$, γ es cualquier curva cerrada simple que encierra a -4.

100. Evaluar $\oint_\gamma \frac{3z^2\cosh(z)dz}{(z+2i)^3}$, γ es cualquier curva cerrada simple que encierra a $-2i$.

$$\int_0 e^{i\cos(\theta)}\cos(k\,sen\theta)d\theta = 2\pi$$

(89) Evalúe la integral $\oint_\gamma \frac{z^4}{z-2i}dz$, γ es cualquier curva cerrada simple que encierra a 2i.

(90) Evalúe $\oint_\gamma \frac{z^3-5z+i}{z-1+2i}dz$, γ es la circunferencia $\|z\|=3$

(91) Evaluar $\oint_\gamma \frac{iz^2dz}{(z-2+1)^4}$ si γ es la circunferencia $\|z\|=2$

(92) Evaluar $\oint_\gamma \frac{\cos(z-i)dz}{(z+2i)^3}$, si γ es cualquier curva cerrada simple que encierra a $-2i$.

(93) Evalúe la integral $\oint_\gamma \frac{z\,sen(3z)dz}{(z+4)^3}$, si γ: $\|z-2i\|=9$

(101) Si γ es el rectángulo $x=\pm 4$, $y=\pm 4$, descrito en dirección positiva, calcular las integrales:

a) $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^n}dz$ b) $\oint_\gamma \frac{senh(2z)dz}{(z-\frac{\pi}{4})^4}$

(102) Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z)=z^3-iz^2-5z+2i$ si γ es la elipse $\|z-3i\|+\|z+3i\|=0$

(103) Demuestre que $\oint_\gamma \cos ec\,z\,dz = 2\pi i$, donde γ es la circunferencia unitaria alrededor del origen.

(104) Si γ es una circunferencia unitaria en el sentido negativo, con centro en $z=0$, demuestre que: $\oint_\gamma \frac{senh(z)}{z^2}dz = -2\pi i$

(105) Si γ es una circunferencia unitaria en el sentido positivo, con centro en $z=0$, demuestre que: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cosh(z)dz}{z^{n+1}} = \begin{cases} 0, & \text{si n es impar} \\ \frac{1}{n!}, & \text{si n es par} \end{cases}$

(106) Si γ es una circunferencia unitaria alrededor del origen en el sentido positivo, calcular:

a) $\oint_\gamma \frac{e^{iz}dz}{z^{n+1}}$ b) $\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$, $|a|<1$, $|b|<1$, $a\neq b$

(107) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{z\,dz}{z^4-1}$, donde γ: $|z-a|=a$, $a>1$

(108) Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, donde el contorno γ contiene en su interior el círculo $\|z\|\leq a$

(109) Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, si el punto a se encuentra dentro del contorno γ.

(110) Calcular la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, si:

a) El punto "0" se encuentra dentro y el punto 1 fuera del contorno γ.

b) El punto 1 se encuentra dentro y el punto 0 fuera del contorno γ.

c) Los puntos 0 y 1 se encuentran ambos dentro del contorno de γ.

(111) Probar que si γ es el contorno del triángulo con vértices en los puntos 0, 3i y -4, con orientación positiva, entonces $\|\oint_\gamma (e^z-\bar{z})dz\|\leq 60$

(112) Sea γ el arco del círculo $\|z\|=2$ que va de $z=2$ a $z=2i$ en el primer cuadrante, sin calcular la integral, probar que: $\|\oint_\gamma \frac{dz}{z^2-1}\|\leq\frac{\pi}{3}$

(113) Sea γ el segmento recto que va de $z=i$ a $z=1$, teniendo en cuenta que el punto mas próximo al origen, de entre los de ese segmento, es su punto medio, demostrar que: $\|\int_\gamma \frac{dz}{z^4}\|\leq 4\sqrt{2}$, sin calcular la integral.

(114) Sea γ el semicírculo superior de centro en "0" y radio $R>1$, $a>0$, si $I_a=\int_\gamma \frac{e^{iaz}}{z^{100}+1}dz$, calcular k tal que $\|I_a\|\leq k$

(115) Si n es un entero positivo, probar que: $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-sen\theta)d\theta=\frac{2\pi}{n!}$

(116) Evaluar la integral $\oint_\gamma e^z dz$, $\gamma=\{z\in C\,/\,\|z\|=1\}$ y deducir las integrales $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}(\theta+sen\theta)d\theta$, $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}sen(\theta+sen\theta)d\theta$.

(117) Evaluar la integral $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-0)^{n+1}}$, donde $\gamma=\{z\in C\,/\,\|z\|=1\}$ y deducir las integrales: $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}(\cos(n\theta-sen\theta))d\theta$, $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}sen(n\theta-sen\theta)d\theta$

(118) Probar que $\|\int_\gamma \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{z^3+1}\|\leq\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$, donde γ es el semicírculo en sentido superior $\|z\|=3$.

CAPÍTULO VI

6. SUCESIONES Y SERIES INFINITAS COMPLEJAS.-

El presente capítulo estará orientado principalmente a las representaciones de las funciones analíticas por series, y para garantizar la existencia de tales representaciones haremos el estudio de las sucesiones y series infinitas de números complejos.

6.1. DEFINICIÓN DE SUCESIÓN COMPLEJA.-

6.2. DEFINICIÓN.-

El recorrido R de una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es el conjunto de los distintos valores de $\{z_n\}_{n\geq 1}$

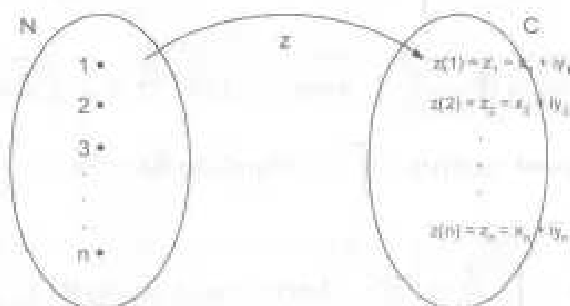
6.3. DEFINICIÓN.-

Una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es acotada si y sólo si su recorrido es acotado; es decir, los términos de la sucesión se encuentran contenidos en una bola cerrada como $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de números C acotada, se tiene que $\exists\, C\in R\,/\,C>0\,/\,\|z_n\|\leq C$, $\forall\, n\in N$.

6.4. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ tiene límite al número z_0, si y sólo si, para todo $\varepsilon>0$,

Una sucesión infinita de números complejos, es una función compleja $z: N \to C$, con dominio en N y rango en C, tal que: $z(n) = z_n = x_n + iy_n$, en donde z_n es el término n – esimo de la sucesión.



NOTACIÓN.- A la sucesión compleja infinita $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, denotaremos por $\{z_n\}_{n\ge1}$, $z_n \in C$, ∀ n ∈ N, donde "z_n" se llama n – esimo término de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ o término general.

Ejemplo.- Si z es una función definida por $z(n)=i^n$, luego z(n) es la sucesión $\{i^n\}_{n\ge1}=\{i,-1,-i,1,i,\dots\}$.

Ejemplo.- A la sucesión compleja:

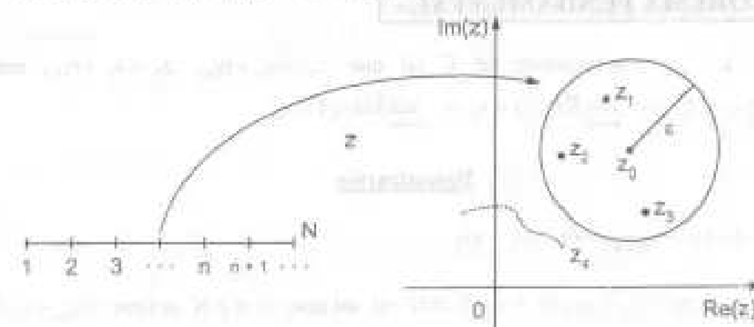
$$1+i,\ \frac{1}{2^2}+\frac{i}{2^2},\ \frac{1}{3^2}+\frac{i}{3^2},\dots, \text{ denotaremos por } \{\frac{1}{n^2}+i\frac{1}{n^2}\}_{n\ge1}$$

existe un número N > 0, tal que ∀ n ∈ N se tiene $\|z_n - z_0\| < \varepsilon$

EN FORMA SIMBÓLICA.-

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0 / \text{si } n>N \Rightarrow \|z_n - z_0\|<\varepsilon$$

NOTACIÓN.- $d(z_n,z_0)=\|z_n-z_0\|<\varepsilon$



Ejemplo.- Probar que: $\{\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}\}_{n\ge1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Desarrollo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N>0 / \text{ si } n>N \Rightarrow \|\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}\|<\varepsilon,\ \forall n\ge N$$

$$\|\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}-0\|=\|\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}\|=\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\frac{\sqrt{2}}{n^2}<\varepsilon \Rightarrow n^2>\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$$

de donde $n>\sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon^2}}=N$

Luego $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ N=\sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon^2}}\ /\ \|\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}-0\|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$

Es decir: $\{\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}\}_{n\ge1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

6.5. DEFINICIÓN.-

Sea $z_0=x_0+iy_0\in C$, se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}\subset C$, $z_n=x_n+iy_n=\text{Re}(z_n)+i\,\text{Im}(z_n)$ es convergente si y sólo si $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$.

Si $\lim_{n\to\infty} z_n$ no existe, se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ es divergente.

6.6. TEOREMA FUNDAMENTAL.-

Sea $\{z_n\}_{n\ge1}$ una sucesión en C tal que $z_n=x_n+iy_n$, $z_0=x_0+iy_0$, entonces: $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\text{Re}(z_n)=x_0 \wedge \lim_{n\to\infty}\text{Im}(z_n)=y_0$

Demostración

$\Rightarrow)$ $\{z_n\}_{n\ge1}\xrightarrow[n\to\infty]{} z_0=x_0+iy_0$

$\lim_{n\to\infty} z_n=z_0=x_0+iy_0$, si $\forall\ \varepsilon>0, \exists N>0$, tal que: ∀ n ≥ N se tiene $\|z_n-z_0\|<\varepsilon$

$\|x_n+iy_n-x_0-iy_0\|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$

$\|(x_n-x_0)+i(y_n-y_0)\|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$

$\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$

$|x_n-x_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2}\le\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$

$\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon>0,\ \exists N>0\ /\ |x_n-x_0|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$

$|y_n-y_0|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N$, entonces $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \wedge \lim_{n\to\infty}y_n=y_0$ o sea

$\{x_n\}_{n\ge1}\xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ \{y_n\}_{n\ge1}\xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$

$\Leftarrow)$ Si $\{x_n\}_{n\ge1}\xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ \{y_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ (por hipótesis)

probar que $\{z_n\}_{n\ge1}\xrightarrow[n\to\infty]{} z_0=x_0+iy_0$. En efecto:

Como $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, si $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists N_1>0\ /\ |x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ \forall\ n\ge N_1$

Como $\lim_{n\to\infty}y_n=y_0$, si $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists N_2>0\ /\ |x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ \forall\ N\ge N_2$

Entonces: $\begin{cases}(x_n-x_0)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}\\(y_n-y_0)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}\end{cases} \Rightarrow (x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2<\varepsilon^2$

$\Rightarrow \sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon \Rightarrow \|(x_n-x_0)+i(y_n-y_0)\|<\varepsilon$

$\Rightarrow \|(x_n+iy_n)-(x_0+iy_0)\|<\varepsilon$, entonces $\|z_n-z_0\|<\varepsilon$

es decir $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists N>0\ /\ \|z_n-z_0\|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge N=\max\{N_1,N_2\}$

entonces $\{z_n\}_{n\ge1}\xrightarrow[n\to\infty]{} z_0=x_0+iy_0$ o sea que: $\lim_{n\to\infty}z_n=z_0=x_0+iy_0$

OBSERVACIÓN.- Si $\{z_n\}_{n\ge1}\not\to z_0=x_0+iy_0$ (no converge o no existe $\lim_{n\to\infty}z_n$), entonces se dice que la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ es divergente.

Ejemplo.- Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{\sqrt[n]{a^n+b^n}+in(\sqrt[n]{2}-1)\}$ donde $0<b\le a$

Desarrollo

6.9. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ es oscilante si ni converge ni diverge a infinito.

Ejemplo.- La sucesión $\{i^n\}=\{i,-1,-i,1,i,-1,\dots\}$ es oscilante.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} = \{\sqrt[n]{a^n + b^n}\}_{n\geq 1}$ y $\{y_n\}_{n\geq 1} = \{n(\sqrt[n]{2} - 1)\}_{n\geq 1}$

Como $0 < b \leq a \Rightarrow 0 < b^n \leq a^n \Rightarrow a^n \leq a^n + b^n \leq 2a^n$, $\forall\ n \in Z^+$

$a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2}a$, entonces tomando límite

$$\lim_{n\to\infty} a \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}a \Rightarrow a \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2$$

Luego $\{\sqrt[n]{a^n + b^n} + in(\sqrt[n]{2} - 1)\}_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + i\ln 2$

6.7. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión compleja $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ N > 0, tal que $\| z_n - z_m \| < \varepsilon$, $\forall$ n > N, m > M

6.8. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ diverge a infinito ($\{z_n\}_{n\geq 1} \to \infty$) si $\forall$ M > 0, $\exists$ N > 0 tal que $\| z_n \| > M$, $\forall$ n > N

Ejemplo.- La sucesión {1 + ni} diverge a más infinito 1 + i, 1+ 2i, 1 + 3i, ..., 1 + ni, ...

6.10. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES COMPLEJAS.-

Supongamos que: $z_n \to L$ y $w_n \to k$, entonces:

① $z_n + w_n \to L + k$

② $\alpha z_n \to \alpha L$

③ $z_n w_n \to L.k$

④ $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{L}{k}$ siempre que $w_n \neq 0$ y $z_n \to L$

6.11. TEOREMA.-

Una sucesión compleja converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración

Se entiende que el estudiante está familiarizado con el criterio de la convergencia de Cauchy para sucesiones reales.

Supongamos que $z_n \to L$, para algún N, $\| z_n - L \| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $n \geq N$, entonces, para $n \geq N$ y $m \geq N$ tenemos:

$$\| z_n - z_m \| = \| (z_n - L) - (z_m - L) \| \leq \| z_n - L \| + \| z_m - L \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, recíprocamente:

Supongamos que $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, por probar que $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

Sea $z_n = x_n + iy_n$, para algún N, $\| z_n - z_m \| < \varepsilon$

Si $n \geq N$, $m \geq N$ como $| x_n - x_m | \leq \| z_n - z_m \|$

$\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy real por lo tanto converge a algún número real x_0 en forma similar para $\{y_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy real y también converge a algún número real b entonces $z_n \to a + ib$.

6.12. SERIES INFINITAS DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

DEFINICIÓN.- Sea $\{z_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión de números complejos, a la expresión siguiente $z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$, llamaremos serie infinita de números complejos y que denotaremos por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + ... + z_n + ... \qquad ...(1)$$

donde los z_n, n = 1,2,3,..., se denominan términos de la serie infinita.

Ahora formaremos una sucesión a partir de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ del modo siguiente.

$S_1 = z_1$

$S_2 = z_1 + z_2$

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$

:

:

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Luego a la sucesión así definida $\{S_n\}_{n\geq 1}$ se denomina sucesión de las sumas parciales de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente o sea que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y su suma es:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es divergente, o sea que $\nexists \lim_{n\to\infty} S_n$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente y por lo tanto carece de suma como $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = S_n + R_n$

A la expresión $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = z_{n+1} + z_{n+2} + ...$ se conoce con el nombre de Residuo de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

6.13. TEOREMA.-

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ es convergente, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son convergentes y si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S_1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = S_2$, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1 + iS_2 = S$

Demostración

Sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$, la sucesión de suma parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, es decir:

$$S_N = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = x_N + iy_N \qquad ...(1)$$

donde $x_N = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $y_N = \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad ...(2)$

entonces tenemos que: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ y de la parte (1)

$$\lim_{N\to\infty} x_N = S_1 \text{ y } \lim_{N\to\infty} y_N = S_2 \qquad ...(3)$$

Luego de (1) implica a (3), por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1 + iS_2 = S$

recíprocamente como $x_N = \sum_{k=1}^{n} x_k$ y $y_N = \sum_{k=1}^{n} y_k$ son las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ entonces $S_N = x_N + iy_N$, entonces $\lim_{n\to\infty} S_N = \lim_{n\to\infty} x_k + i \lim_{n\to\infty} y_N$, de donde $S = S_1 + iS_2$ entonces $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es convergente y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente.

6.14. TEOREMA.-

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si, para todo número positivo ε, existe un entero positivo N > 0, tal que $\| S_{m,p} \| = \| S_{m+1} + S_{m+2} + ... + S_{m+p} \| < \varepsilon$ ∀ m > 0 y ∀ entero P > 0.

Demostración

Sea $S_N = \sum_{k=1}^{n} z_k$, la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, entonces por la condición de Cauchy, la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ de las sumas parciales converge a un límite S, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \| S_n - S_m \| < \varepsilon$, ∀ n,m > N

En forma equivalente para $\| S_{m+p} - S_m \| < \varepsilon$, ∀ m > N, ∀ entero P > 0

Ahora $S_{m+p} = \sum_{k=1}^{m+p} z_k$ y $S_m = \sum_{k=1}^{m} z_k$, de donde

$$S_{m+p} - S_m = \sum_{k=1}^{m+p} z_k - \sum_{k=1}^{m} z_k = \sum_{k=m+1}^{m+p} z_k = S_{m,p}$$

En consecuencia, la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la suma parcial de $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y por lo tanto la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es $\| S_{m,p} \| < \varepsilon$, ∀ m > N y ∀ entero P > 0.

6.15. PROPIEDADES DE LAS SERIES COMPLEJAS.-

① Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

② Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} kz_n$ es convergente.

③ Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ son convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm z_n)$ es convergente.

Demostración

① Es caso particular del teorema anterior haciendo P = 1.

② Si k = 0, es trivial, por las sumas parciales $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ donde n = 1,2,3,... son todos ceros, por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a kl = 0

Supongamos que k ≠ 0, entonces ∀ ε > 0, ∃ N > 0, tal que $\| \sum_{k=1}^{n} z_k - l \| < \frac{\varepsilon}{|k|}$, ∀ n > N, esto es: $\| \sum_{k=1}^{n} kz_k - kl \| < |k| \| \sum_{k=1}^{n} kz_k - l \| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$, ∀ n > N, por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a kl.

③ ∀ ε > 0, ∃ N_1, N_2, tal que:

$$\| \sum_{k=1}^{n} z_k - l \| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n > N_1 \quad y \quad \| \sum_{k=1}^{n} z_k - L' \| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n > N_2$$

Si $N = \max\{N_1, N_2\}$ entonces ∀ n > N

$$\| \sum_{k=1}^{n} (z_k \pm z_k) - (L + L') \| < \| \sum_{k=1}^{n} (z_k - L) \pm \sum_{k=1}^{n} (z_k - L') \|$$

$$\leq \| \sum_{k=1}^{n} z_k - L \| \pm \| \sum_{k=1}^{n} z_k - L' \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm z_n)$ es convergente a $L \pm L'$

6.16. DEFINICIÓN.-

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|$ es convergente.

Ejemplo.- Determinar si las siguientes series dadas son absolutamente convergente.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

Desarrollo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{e^{in}}{n^2} \| = \sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{\cos n + i\, sen\, n}{n^2} \| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\cos^2 n + sen^2 n}}{n^2}$$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es la serie - P = 2 > 1 es convergente, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ es absolutamente convergente.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos in}$

Desarrollo

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + e^{-n}}$, es convergente.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos(in)}$ es absolutamente convergente.

6.17. DEFINICIÓN.-

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|$ no es convergente para $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es condicionalmente convergente.

6.18. SERIES ESPECIALES.-

Las series especiales sirven para comprobar la convergencia absoluto y son las siguientes:

① **LA SERIE GEOMÉTRICA.-** La serie geométrica es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z^0 + z^1 + z^2 + ... + z^n + ...$ y es absolutamente convergente si $\| z \| < 1$ y diverge si $\| z \| \geq 1$

Demostración

La condición necesaria para que cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converja es que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

Si $\| z \| \geq 1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ es divergente.

Si $\| z \| = 0$, la serie converge a cero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos in} \| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\| (1+i)^n \|}{2^{\frac{n}{2}} \| \cos in \|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \| \frac{e^{i(in)} + e^{-i(in)}}{2} \|}$$

Si $0 < \| z \| < 1$, de la identidad se tiene:

$$(1 - \| z \|)(\| z \|^{n+1} + \| z \|^{n+2} + \dots + \| z \|^{n+p}) = \| z \|^{n+1} (1 - \| z \|^p)$$

$$< 1 + (\frac{2}{2^p}) + (\frac{4}{4^p}) + \dots + (\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p})$$

La última serie es una serie geométrica finita de términos finitos donde el primer términos es 1 y la razón es $\frac{1}{2^{p-1}}$, entonces

$$S_{2^n-1} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{1}{1 - 2^{1-p}}, \ \forall \ n > 0,$$

Como la serie es una serie de términos positivos $S_n < S_m$, si n < M, como $n \le 2^n - 1$ para $n = 1,2,3,\dots$

$$S_n \le S_{2^n-1} < \frac{1}{1 - 2^{-(p-1)}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}, \ \forall \ n$$

para $P > 1$, $2^{p-1} > 1$ y por lo tanto $2^{p-1} - 1 > 0$, entonces $\frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1} = M$, que no depende de n y por lo tanto, $\| S_n \| = S_n \le M$, $\forall$ n

Luego la sucesión $\{S_n\}_{n \ge 1}$, de sumas parciales es una sucesión creciente y acotada de números reales y por consiguiente convergente, es decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $P > 1$, y la serie converge absolutamente por que cada términos es positivo.

$$\| z_{n+1} \| + \| z_{n+2} \| + \dots + \| z_{n+p} \| < \varepsilon, \ \forall \ n > N \ y \ P > 0$$

$\| S_{n,p} \| = \| z_{n+1} \| + \| z_{n+2} \| + \dots + \| z_{n+p} \| < \varepsilon$ por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente

6.20. CRITERIOS DE CONVERGENCIA.-

① CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA CONVERGENCIA ABSOLUTA.-

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ es absolutamente convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es una serie infinita, tal que $k > 0$ fijo, $\| z_n \| < k \| w_n \|$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es también absolutamente convergente.

Demostración

$\forall$ $n > 0$, $P > 0$ se tiene:

$$\| z_{n+1} \| + \| z_{n+2} \| + \dots + \| z_{n+p} \| \le k(\| w_{n+1} \| + \| w_{n+2} \| + \dots + \| w_{n+p} \|)$$

Si $\forall$ $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, $\exists$ $N > 0$, tal que $\forall$ $n > N$ y $\forall$ $P > 0$, $\| w_{n+1} \| + \| w_{n+2} \| + \dots + \| w_{n+p} \| < \frac{\varepsilon}{k}$

Por lo tanto $\| z_{n+1} \| + \| z_{n+2} \| + \dots + \| z_{n+p} \| < \varepsilon$, $\forall$ $n > N$ y $P > 0$

6.19. TEOREMA.-

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente.

Demostración

Como $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|$ es convergente, entonces, $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N > 0$ tal que $\forall\ n > N$ y $P > 0$, se tiene:

En consecuencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente.

② **CRITERIO DE LA RAZÓN DE D'ALAMBERT DE CONVERGENCIA ABSOLUTA.-**

Si $\lim_{n\to\infty} \| \frac{u_{n+1}}{u_n} \| = L$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si $L < 1$ y diverge si $L > 1$.

Demostración

Se debe probar que: si $\lim_{n\to\infty} \| \frac{u_{n+1}}{u_n} \| = L < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|$ es convergente.

Sea $N > 0$, suficientemente grande tal que:

$\forall\ n \geq N,\ \| \frac{u_{n+1}}{u_n} \| \leq r$ donde $L < r < 1$ entonces

$\| u_{n+1} \| \leq r \| u_n \|$

$\| u_{n+2} \| \leq r \| u_{n+1} \| \leq r^2 \| u_n \|$

$\| u_{n+3} \| \leq r \| u_{n+2} \| \leq r^3 \| u_n \|$

.

.

$\| u_{n+1} \| + \| u_{n+2} \| + \| u_{n+3} \| + ... \leq \| u_n \| (r + r^2 + r^3 + ...)$

Luego por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|$ es convergente para $0 < r < 1$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente.

6.21. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Calcular $\lim_{n\to\infty} z_n$, donde $z_n = \frac{in^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}$

Desarrollo

$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{in^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}$, dividiendo entre n^2

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{i - \frac{i}{n} + \frac{1-3i}{n}}{(2 + \frac{4i-3}{n})(1 - \frac{i}{n})} = \frac{i - 0 + 0}{(2+0)(1-0)} = \frac{i}{2} \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{i}{2}$$

② Calcular $\lim_{n\to\infty} z_n$, donde $z_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i})$

Desarrollo

$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i})$, racionalizando

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{i\sqrt{n}}{\sqrt{n+2i} + \sqrt{n+i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{i}{\sqrt{1+\frac{2i}{n}} + \sqrt{1+\frac{i}{n}}} = \frac{i}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{i}{2}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{i}{2}$

③ Calcular $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n)$ donde $a_n = 2(\frac{1}{4})^1 + 3(\frac{1}{4})^2 + ... + (n+1)(\frac{1}{4})^n$ y $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Desarrollo

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n \qquad ...(1)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [2(\frac{1}{4})^1 + 3(\frac{1}{4})^2 + ... + (n+1)(\frac{1}{4})^n]$$

$$a_n = 2(\frac{1}{4}) + 3(\frac{1}{4^2}) + ... + (n+1)\frac{1}{4^n}$$

$$\frac{1}{4}a_n = 2(\frac{1}{4^2}) + 3(\frac{1}{4^3}) + ... + (n+1)\frac{1}{4^{n+1}}$$

$$a_n - \frac{1}{4}a_n = \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^n} - \frac{n+1}{4^{n+1}}$$

$$\frac{3}{4}a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-2}}) - \frac{n+1}{4^{n+1}}$$

$$a_n = \frac{4}{3}[\frac{1}{2} + \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-2}} + \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}}) - \frac{n+1}{4^{n+1}}]$$

$$= \frac{4}{3}[\frac{1}{2} + \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-2}} + \frac{1}{4^{n-1}}) - \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{n+1}{4^{n+1}}]$$

$$= \frac{4}{3}[\frac{1}{2} + \frac{1}{16}(\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}) - \frac{n+2}{4^{n+1}}]$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}[\frac{1}{2} + \frac{1}{16}(\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}) - \frac{n+2}{4^{n+1}}] = \frac{4}{3}[\frac{1}{2} + \frac{1}{16}(\frac{1-0}{\frac{3}{4}}) - 0]$$

$$= \frac{4}{3}[\frac{1}{2} + \frac{1}{12}] = \frac{4}{3}(\frac{7}{12}) = \frac{7}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{9} \qquad ...(2)$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, aplicando el teorema de Sándwich

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, tomando límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq 1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \qquad ...(3)$$

ahora reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene: $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{7}{9} + i$

④ Calcular $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n)$, donde

$$a_n = \frac{1}{n^2}[e^{-(\frac{1}{n})^2} + 2e^{-(\frac{2}{n})^2} + 3e^{-(\frac{3}{n})^2} + ... + ne^{-(\frac{n}{n})^2}] \text{ y } b_n = \frac{1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$$

Desarrollo

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

.

.

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad \text{sumando}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} =$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}[e^{\ldots} + 2e^{\ldots} + 3e^{\ldots} + \dots + ne^{\ldots}]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}e^{-(\frac{1}{n})^2} + \frac{2}{n}e^{-(\frac{2}{n})^2} + \frac{3}{n}e^{-(\frac{3}{n})^2} + \dots + \frac{n}{n}e^{-(\frac{n}{n})^2}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{-(\frac{i}{n})^2}, \text{ tomando limite}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{-(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big/_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1}-1) = \frac{1-e^{-1}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-e^{-1}}{2} \qquad \dots (1)$$

$$b_n = \frac{1^p+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1^p+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^p}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= [(\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + (\frac{3}{n})^p + \dots + (\frac{n}{n})^p]\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\cdot\frac{1}{n}, \text{ tomando limite}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big/_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{p+1} \qquad \dots (2)$$

como $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i\lim_{n\to\infty} b_n$ ... (3)

reemplazando (1) y (2) en (3) se tiene: $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1-e^{-1}}{2} + \frac{i}{p+1}$

) Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ donde $z_n = \frac{8^{n+1}+9^{n+1}}{8^n+9^n} + in\,\text{arctg}\frac{1}{n}$

<u>**Desarrollo**</u>

Sea $z_n = x_n + iy_n \Rightarrow \text{Re}(z_n) = x_n = \frac{8^{n+1}+9^{n+1}}{8^n+9^n}$

$$\text{Im}(z_n) = y_n = n\,\text{arctg}\frac{1}{n}$$

como $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n$ ... (1)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}+9^{n+1}}{8^n+9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8(8^n+9^n)}{8^n+9^n} + \frac{9^n}{8^n+9^n} = \lim_{n\to\infty} 8 + \frac{1}{(\frac{8}{9})^n+1} = 8 + \frac{1}{0+1} = 9$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 9 \qquad \dots (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n\,\text{arctg}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\text{arctg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0}\frac{\text{arctg}\,x}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2} = 1 \quad \text{(por la regla de L'Hospital)}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1 \qquad \dots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene: $\lim_{n\to\infty} z_n = 9 + i$

como $\lim_{n\to\infty} z_n$ existe, entonces la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ es convergente.

(6) Decir si converge o no la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ donde $z_n = \frac{(1+i)^n}{n}$

<u>**Desarrollo**</u>

$$z_n = \frac{(1+i)^n}{n} = \frac{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^n}{n} = \frac{2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}i}}{n}, \text{ de donde } \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n\pi}{4}i}}{n} = +\infty$$

por lo tanto, como $\nexists \lim_{n\to\infty} z_n$, la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ es divergente.

(7) Decir si converge o no la sucesión $\{z_n\}$, donde $z_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1}$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+\frac{3i}{n}} - \frac{i}{1+\frac{1}{n}}) = \frac{1}{1+0} - \frac{i}{1+0} = 1-i$$

como $\exists \lim_{n\to\infty} z_n$ entonces la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ es convergente.

(8) Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ donde

$$z_n = \frac{(2n+1)^{2n+5}n^{n-3}}{4(n+1)^{n+2}(n+3)^{2n}} + i(1-tg^2\frac{a}{2})(1-tg^2\frac{a}{2^2})\dots(1-tg^2\frac{a}{2^n})$$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\text{Re}(z_n) + i\lim_{n\to\infty}\text{Im}(z_n) \qquad \dots (1)$$

$$\text{Re}(z_n) = \frac{(2n+1)^{2n+5}n^{n-3}}{4(n+1)^{n+2}(n+3)^{2n}}, \quad \text{Im}(z_n) = (1-tg^2\frac{a}{2})(1-tg^2\frac{a}{2^2})\dots(1-tg^2\frac{a}{2^n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\text{Re}(z_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{2n+5}n^{n-3}}{[4(n+1)]^{n+2}(n+3)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n+5}(1+\frac{1}{2n})^{2n+5}n^{n-3}}{(4n)^{n+2}(1+\frac{1}{4n})^{n+2}n^{2n}(1+\frac{3}{n})^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+5}n^{2n+5}(1+\frac{1}{2n})^{2n+5}n^{n-3}}{2^{2n+4}n^{n+2}(1+\frac{1}{4n})^{n+2}n^{2n}(1+\frac{3}{n})^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^{3n+2}(1+\frac{1}{2n})^{2n+5}}{n^{3n+2}(1+\frac{1}{4n})^{2n+5}(1+\frac{3}{n})^{2n}}$$

<u>**Desarrollo**</u>

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + i\lim_{n\to\infty} b_n \qquad \dots (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^6(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n^n+3}})^{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{(n^2+3)^3}(1-\frac{\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[n]{n^n+3}})^{3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^6}{(n^2+3)^3}\cdot\lim_{n\to\infty}[(1-\frac{\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[n]{n^n+3}})^{-\frac{\sqrt[n]{n^n+3}}{\sqrt[3]{n^2+3}}}]^{-\frac{3n\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[n]{n^n+3}}}$$

(the first limit is marked 1 and the second e beneath the braces)

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+\frac{1}{2n})^{2n}]^{\frac{2n+5}{2n}}}{[(1+\frac{1}{4n})^{4n}]^{\frac{2n+5}{4n}}[(1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}}]^{6}} = 2\frac{e}{e^{\frac{1}{2}}e^{6}} = 2e^{-\frac{11}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im}(z_n) = \lim_{n\to\infty}[(1-tg^2\frac{a}{2})(1-tg^2\frac{a}{2^2})\ldots(1-tg^2\frac{a}{2^n})]$$

aplicando la identidad: $1-tg^2\theta = \frac{2tg\theta}{tg2\theta}$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im}(z_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2tg\frac{a}{2}}{tga}\cdot\frac{2tg\frac{a}{2^2}}{tg\frac{a}{2}}\cdots\frac{2tg\frac{a}{2^n}}{tg\frac{a}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n.tg\frac{a}{2^n}}{tga} = ctga.\lim_{n\to\infty}\frac{atg\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$$

$= \text{ctg a (a)} = \text{a ctg a},\ a > 0$ $\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty} z_n = 2e^{-\frac{11}{2}} + ia\,ctga$

como $\lim_{n\to\infty} z_n$ existe $\Rightarrow \{z_n\}_{n\geq1}$ es convergente.

(9) Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\geq1}$ donde $z_n = n^6(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} - \frac{1}{\sqrt[6]{n^6+3}})^{3n} + i(\frac{\ln(na)}{\ln(nb)})^{\ln(n)}$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-3n\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[6]{n^6+3}}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-3n.n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}}{n\sqrt[6]{1+\frac{3}{n^6}}}} = e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{3n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}}{(1+\frac{3}{n^6})^{\frac{1}{6}}}} = e^{-3} \qquad \ldots(2)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(na)}{\ln(nb)})^{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(n)+\ln a}{\ln(n)+\ln b})^{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{\ln(a)-\ln(b)}{\ln(n)+\ln(b)})^{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{\ln a-\ln b}{\ln(n)+\ln b})^{\frac{\ln(n)+\ln b}{\ln a-\ln b}}]^{\frac{\ln a-\ln b}{\ln(n)+\ln b}\ln(n)}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}(\ln a-\ln b)\frac{\ln(n)}{\ln(n)+\ln b}} = e^{\ln\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \qquad \ldots(3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene: $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{-3} + \frac{a}{b}i$, $a > 1$, $b > 1$

como $\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, entonces $\{z_n\}_{n\geq1}$ es convergente.

(10) Demuestre que la sucesión $\{z_n\}_{n\geq1} = \{e^{i(\frac{\pi}{2n})}\}_{n\geq1}$ converge y encuentre su límite.

Desarrollo

$z_n = e^{i\frac{\pi}{2n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} e^{i\frac{\pi}{2n}} = e^0 = 1$ $\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty} z_n = 1$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 > 0\ /\ \| e^{i\frac{\pi}{2n}} - 1\| < \varepsilon,\ \forall\ n > N_0$

$\| e^{i\frac{\pi}{2n}} - 1\| = \|\cos\frac{\pi}{2n} + isen\frac{\pi}{2n} - 1\| < \varepsilon$

$\underbrace{\|\cos\frac{\pi}{2n} + isen\frac{\pi}{2n}\|}_{1} - 1| \leq \|\cos\frac{\pi}{2n} + isen\frac{\pi}{2n} - 1\| < \varepsilon$

por lo tanto hasta tomar $N_0 = \varepsilon$ para demostrar que el límite existe, es decir: $\lim_{n\to\infty} e^{i\frac{\pi}{2n}} = 1$

(11) Demuestre que la sucesión $\{z_n\}_{n\geq1} = \{(2-\frac{1}{n^2}).\frac{(n-1)}{\pi n}\}_{n\geq1}$ es convergente y encuentre su límite.

Desarrollo

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2}).\frac{(n-1)}{\pi n} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{\pi}(2-0)(1-0) = \frac{2}{\pi}$$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 > 0\ /\ \|(2-\frac{1}{n^2})\frac{(n-1)}{\pi n} - \frac{2}{\pi}\| < \varepsilon$

$\|(2-\frac{1}{n^2})\frac{(n-1)}{\pi n} - \frac{2}{\pi}\| = \frac{1}{\pi}\|\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\| < \varepsilon$

$\frac{1}{|\pi n^3|} < \frac{1}{\pi}|\frac{2n^2+n-1}{n^3}| < \varepsilon$ por lo tanto $\frac{1}{\pi|n^3|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\pi\varepsilon} < |n^3| = n^3$

$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\pi\varepsilon}} = N_0$, por lo tanto, $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0\ /\ n > N_0$

(12) Probar que: $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, entonces $\lim_{n\to\infty}\| z_n\| = \| z_n\|$

Desarrollo

1ro. $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\| z_n\| = \| z\|$, por definición:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 > 0\ /\ \| z_n - z\| < \varepsilon$, siempre que $n > N_0$

pero $|\| z_n\| - \| z\|| \leq \| z_n - z\| < \varepsilon$, de donde $|\| z_n\| - \| z\|| < \varepsilon = N_0$

entonces basta tomar $n > N_0 = \varepsilon$ de modo que:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 > 0\ /\ |\| z_n\| - \| z\|| < \varepsilon,\ N_0 = \varepsilon$

2do. $\lim_{n\to\infty}\| z_n\| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ siendo $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^2} = \sqrt{(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + (\lim_{n\to\infty} y_n)^2}$$

$= \sqrt{x^2 + y^2} = \| z\|$ $\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}\| z_n\| = \| z\|$

(13) Demuestre que una sucesión compleja $z_1, z_2, \ldots$ es acotada si y sólo si las dos sucesiones correspondientes de las partes imaginarias son acotadas.

Desarrollo

Sea $z_n = x_n + iy_n$ una sucesión en C

1ro. $\{z_n\}_{n\geq1}$ es acotada $\Rightarrow \{x_n\}_{n\geq1}$ y $\{y_n\}_{n\geq1}$, son acotadas por hipótesis:

$\exists\ k > 0\ /\ \| z_n\| < k,\ \forall\ n \in N$

$\| x_n\| = \sqrt{(x_n^2)} < \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} = \| z_n\| < k$

$\| y_n\| = \sqrt{(y_n^2)} < \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} = \| z_n\| < k$

entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\geq1}$ y $\{y_n\}_{n\geq1}$ son acotadas

2do. $\{x_n\}_{n\geq1}$ y $\{y_n\}_{n\geq1}$ son acotadas $\Rightarrow \{z_n\}_{n\geq1}$ es acotada

$\exists\ k > 0\ /\ |x_n| < k,\ \forall\ n \in N$ y $|y_n| < M,\ \forall\ n \in N$

$$\Rightarrow \; \|w_n - w\| < \|w_n - z\| + r < 2r$$

$$\|w_n - w\| < r \;\Rightarrow\; w_n \in B_r(z)$$

(18) Estudiar la convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+sen^2 n}{ie^n+(2-i)n}$

Desarrollo

Analizando primero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{n+sen^2 n}{ie^n+(2-i)n} \right\|$

Aplicando el criterio de comparación, es decir:

$$\left\| \frac{n+sen^2 n}{ie^n+(2-i)n} \right\| \le \frac{|n|+|sen^2 n|}{\|ie^n+(2-i)n\|} \le \frac{n+1}{\|ie^n\| - \|(2-i)n\|}$$

$$\le \frac{n+1}{e^n-\sqrt{5}n} \le \frac{n+1}{e^n-3n} \le \frac{2(n+1)}{e^n} \le \frac{4n}{e^n}$$

(puesto que $|\,sen\, n\,| < 1 \Rightarrow |sen^2 n| < 1$)

$$\left\| \frac{n+sen^2 n}{ie^n+(2-i)n} \right\| \le \frac{4n}{e^n}$$

(se sabe que $n \le \frac{1}{6}e^n$, $\forall\, n \ge 3 \Rightarrow -3n \ge -\frac{e^n}{2} \Rightarrow e^n - 3n \ge e^n - \frac{e^n}{2} = \frac{e^n}{2}$ de donde

$e^n - 3n \ge \frac{e^n}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^n-3n} \le \frac{2}{e^n}$)

consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{e^n}$, aplicando criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4n}{e^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$ se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{e^n}$ es convergente.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+sen^2 n}{ie^n+(2-i)n}$ es convergente absolutamente.

(19) Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+7i)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

Desarrollo

Aplicando criterio de la razón se tiene: $u_n = \frac{(3+7i)^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(3+7i)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\frac{(3+7i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(3+7i)^n}{n!}} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{n!(3+7i)^{n+1}}{(n+1)!(3+7i)^n} \right\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\|3+7i\|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+49}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{58}}{n+1} = 0 < 1$$

como L < 1, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+7i)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

(20) Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2}i)^n$ es absolutamente convergente.

Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón: $u_n = n(\frac{1}{2}i)^n \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)(\frac{1}{2}i)^{n+1}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(n+1)(\frac{1}{2}i)^{n+1}}{n(\frac{1}{2}i)^n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left\| \frac{1}{2}i \right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

como L < 1 entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2}i)^n$ es absolutamente convergente.

(21) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón: $u_n=\frac{(n+1)(2+i)^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{(n+2)(2+i)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{(n+2)(2+i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(n+2)n!.(2+i)^{n+1}}{(n+1)(n+1)!.(2+i)^n}\right\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}\|2+i\| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}(n+2)}{(n+1)^2}=0<1$$

como L < 1 entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

(22) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n^2}e^{n(\frac{1}{2}-i)}$ es absolutamente convergente.

Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón: $u_n=(\frac{1}{2})^{n^2}e^{n(\frac{1}{2}-i)} \Rightarrow u_n=(\frac{1}{2})^{(n+1)^2}e^{(n+1)(\frac{1}{2}-i)}$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(\frac{1}{2})^{(n+1)^2}e^{(n+1)(\frac{1}{2}-i)}}{(\frac{1}{2})^{n^2}e^{n(\frac{1}{2}-i)}}\right\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^{2n+1}.\|e^{\frac{1}{2}-i}\| = e^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^{2n+1}=0<1$$

como L < 1 entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n^2}e^{n(\frac{1}{2}-i)}$ es absolutamente convergente.

(23) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(8+i)}{(n+1)(n+2)}$ es absolutamente convergente.

Desarrollo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(8+i)}{(n+1)(n+2)}=(8+i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$a_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}\le\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}=b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es convergente

como $a_n\le b_n$ donde $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es divergente entonces por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(8+i)}{(n+1)(n+2)}$ es divergente.

(24) Estudiar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{2^n}+i\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})]$ si es convergente calcular su suma.

Desarrollo

Estudiar la convergencia o divergencia de la serie compleja

$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{2^n}+i\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})]$ es equivalente estudiar la convergencia o divergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$

para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ aplicamos el criterio de la raíz

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=\frac{1}{2}e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}}=\frac{1}{2}e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}<1$$

como L < 1 la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ es convergente

ahora calculamos la suma de la serie para esto usamos la serie geométrica.

$\sum_{n=1}^{\infty}$, derivando $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ para $x=\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}$ de donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$

ahora estudiaremos a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$, aplicamos el criterio de comparación directa $a_n=\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})\le\frac{1}{n(n+2)}\le\frac{1}{n^2}=b_n$

donde $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente

como $a_n\le b_n$ donde $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es convergente entonces por el criterio de comparación

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})$ es convergente.

Ahora calculamos la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})=\sum_{n=1}^{\infty}[2\ln(n+1)-\ln n-\ln(n+2)]$$

$a_3=2\ln 4-\ln 3-\ln 5$
$a_4=2\ln 5-\ln 4-\ln 6$
.
.
.
$a_{n-2}=2\ln(n-1)-\ln(n-2)-\ln(n)$
$a_{n-1}=2\ln(n)-\ln(n-1)-\ln(n+1)$
$a_n=2\ln(n+1)-\ln(n)-\ln(n+2)$ sumando

$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\ln 2+\ln(n+1)-\ln(n+2)$

$S_n=\ln(2)+\ln(\frac{n+1}{n+2})$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(2)+\ln(\frac{n+1}{n+2})=\ln(2)+0=\ln 2$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})=\lim_{n\to\infty}S_n=\ln 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{2^n}+i\ln(1+\frac{1}{n(n+2)})]=2+i\ln 2$

(25) Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n e^{in}}{n^{\frac{3}{2}}}\cos(n^2+4n+5)$

Desarrollo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{i^n e^{in}}{n^{\frac{3}{2}}}\cos(n^2+4n+5)\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}|\cos(n^2+4n+5)|$$

$a_n = 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$

$a_1 = 2\ln 2 - \ln 1 - \ln 3$

$a_2 = 2\ln 3 - \ln 2 - \ln 4$

$a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}|\cos(n^2+4n+5)| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n$ donde $\sum_{n=1} b_n = \sum_{n=1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ es convergente por la serie $P = \frac{3}{2} > 1$

Luego por el criterio de comparación directa, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{i^n e^{in} \cos(n^2+4n+5)}{n^{\frac{3}{2}}} \|$ es convergente.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n e^{in} \cos(n^2+4n+5)}{n^{\frac{3}{2}}}$ es absolutamente convergente.

6.22. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Estudiar la convergencia o divergencia de las sucesiones

a) $\{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} i\}_{n\ge1}$ b) $\{\frac{n}{3n+1} + \frac{1}{n^2} i\}_{n\ge1}$

(2) Analizar la sucesión $\{\frac{\ln(n^2+1)}{n} + i\frac{sen(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\}_{n\ge1}$

(3) Analizar la sucesión $\{\frac{1}{n^2} + \frac{n^4+3n^2}{n^3+1} i\}_{n\ge1}$

(4) Analizar la sucesión $\{\frac{10^{n+1}+11^{n+1}}{10^n+11^n} + in^{\frac{1}{n}}\}_{n\ge1}$

(5) Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$, donde $z_n = (\sqrt{n}+1-\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}} + i\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+...+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$

(6) Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$, donde $z_n = n\, arctg\frac{1}{n} + in\, sen\frac{1}{n}$

(7) Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$, donde $z_n = (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}) + i[(3-2\frac{a_{n+1}}{a_n})^{n(\frac{\pi}{2}(\frac{n+1}{n}))}]$

(8) Determinar si $\{z_n\}_{n\ge1}$, converge, para los números complejos z_n dados:

a) $z_n = \frac{1+2n^2}{n^2} - \frac{n-1}{n} i$ b) $z_n = (-\frac{1}{n})^n + \frac{3n^2}{n^2+2} i$

c) $z_n = (\frac{n^2}{n+i}) i$ d) $z_n = \frac{1}{1-i}(\frac{n^2+4}{n^2-3n})$

(9) Una sucesión $\{z_n\}_{n\ge1}$ está acotada si existe algún número M tal que $\|z_n\| \le M$, para todo n pruebe que usa sucesión convergente es acotada.

(10) De un ejemplo en el que $\{\|z_n\|\}_{n\ge1}$ converge pero $\{z_n\}_{n\ge1}$ diverge.

(11) Sea z_1 y z_2 números complejos dados. Sea $z_n = \frac{1}{2}(z_{n-1} + z_{n-2})$ pruebe que esta sucesión converge mostrando que es una sucesión de Cauchy, después utilice el hecho de que converge para probar que el límite es $\frac{1}{3}(z_1 + 2z_2)$

(12) Probar que la sucesión $\{-2 + i\frac{(-1)^n}{n^2}\}_{n\ge1}$ converge a -2.

(13) Demuestre que las sucesiones converge y encuentre sus límites.

a) $\{z_n\}_{n\ge1} = \{e^{i(\frac{\pi}{2n})}\}_{n\ge1}$ b) $\{z_n\}_{n\ge1} = \{(2-\frac{1}{n^2})(\frac{n-1}{n\pi})\}_{n\ge1}$

(14) Demuestre que la sucesión $\{e^{\frac{n i(e^2-1)}{2(n^2+n)}}\}_{n\ge1}$, converge y su límite es 1.

(15) Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{z_n\}_{n\ge1} = \{a_n + ib_n\}_{n\ge1}$, donde

a) $a_n = \frac{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}$; $b_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

b) $a_n = n - n^2\ln(1+\frac{1}{n})$; $b = n(\sqrt[n]{2}-1)$

c) $a_n = \frac{n^2}{n^3+1^3} + \frac{n^2}{n^3+2^3} + ... + \frac{n^2}{n^3+n^3}$; $b_n = \frac{1}{n}(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{n^2}{n^2})$

(16) Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(3-4i)^n}{n!}]$

(17) Analizar la convergencia de las series siguientes:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

(18) Estudiar la convergencia de las series siguientes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\alpha n}}{n}$

(19) Estudiar la convergencia de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, sen(in)}{3^n}$

(20) Analice la convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{...} i)$ b) $\sum^{\infty} (\frac{sen(n)}{...} + \frac{1}{...}(i)^{3n})$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+7i)^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(6+i)}{(n+1)(n+2)}$

(24) Determinar cual de las siguientes series son absolutamente convergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n2} e^{n(\frac{i}{2}-i)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{i}{2})^n$

(25) Determinar cual de las siguientes series son absolutamente convergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} e^{in} \cos n^2$

(26) Estudiar la convergencia o divergencia de las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2^n n!}{n^n} + i(\frac{e^n}{n!}))$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(n+1)2^n}{n!} + i\frac{(n+3)!}{3!.n!.3^n})$

(27) Analizar la convergencia de las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + i\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + \frac{i}{(n+1)(\ln(n+1))^2})$

(21) Analizar la convergencia de las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}i)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\cosh(in)$

(22) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{i}{3})^{n-1}$ converge y hallar su suma.

(23) Determinar cual de las siguientes series son absolutamente convergente.

(28) Analizar la convergencia de las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\frac{i}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}[(n^n+1)^{\frac{1}{n}}+in(\frac{2}{3})^n]$

(29) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{8^{n+1}.n!}+\frac{i}{n!}]$ es convergente calcular su suma.

(30) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{2^{n+1}}+i\ln(1+\frac{1}{n(n+2)}))$ es convergente, calcular su suma.

CAPÍTULO VII

7. SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT.

7.1. SERIES DE POTENCIAS.-

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n = c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+... \quad ...(1)$$

donde c_n son constantes reales y complejos llamados coeficientes "z_0" es constante y se llama centro de la serie, "z" es la variable compleja.

Si $z_0=0$, la serie (1) se reduce a la forma $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n = c_0+c_1z+c_2z^2+...+$, serie de potencias en z.

OBSERVACIÓN.-

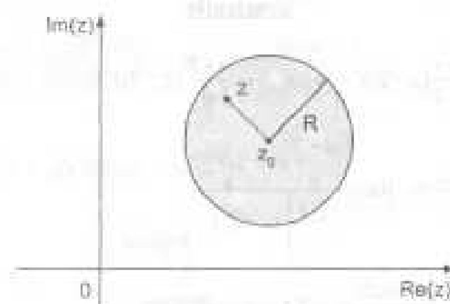
(1) Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente, $\forall$ z $\in$ C tal que $\|z-z_0\|<R$ y es divergente, $\forall$ z $\in$ C, tal que $\|z-z_0\|>R$.

(2) Si $\exists$ R > 0, tal que $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente en $\|z-z_0\|<R$ y si $0<\rho<R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente en $\|z-z_0\|<\rho$.

(3) La serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall$ z $\in$ C (en particular en $z=z_0$) tal que $\|z-z_0\|<R$ y si $0<\rho<R$, entonces la serie converge uniformemente, $\forall$ z $\in$ C tal que $0<\|z-z_0\|<\rho$.

(4) Al número R > 0, se llama radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

(5) Para $z\in C$, se tiene $\|z-z_0\|<R$, que se denomina región de convergencia.



(6) Para hallar el radio y región de la convergencia de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, se utiliza el criterio de la razón, que esta caracterizada por el siguiente teorema.

7.2. TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia en C y sea $u_n=c_n(z-z_0)^n$, tal que $\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=L$, entonces:

i) Si L < 1, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente.

ii) Si L > 1, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ diverge.

iii) Si L = 1, el criterio no decide.

Ejemplos.- Determinar la región de convergencia de las siguientes series:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n$

Desarrollo

Sea $u_n=\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n \Rightarrow u_{n+1}=\frac{n+2}{n}(z-2i)^{n+1}$

$$L=\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{\frac{n+2}{n}(z-2i)^{n+1}}{\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n}\|$$

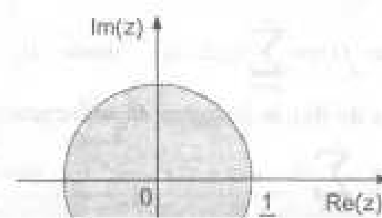
$$=\lim_{n\to\infty}\|\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}(z-2i)\|=\|z-2i\|<1$$

$$\|z-2i\|=\|x+(y-2)i\|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}<1$$

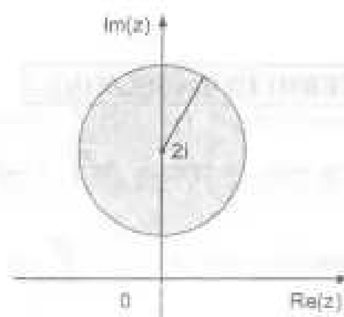
$$L=\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)!}{((n+1)!)^2}z^n}{\frac{(-1)^n(2n)!z^n}{(n!)^2}}\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(2n+2)!}{((n+1)!)^2(2n)!}\|z\|=\|z\|\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$=4\|z\|<1 \text{ de donde } \|z\|<\frac{1}{4}$$



$\therefore\ x^2+(y-2)^2<1$



2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}z^n$

Desarrollo

Sea $u_n=\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}z^n \Rightarrow u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)!z^{n+1}}{((n+1)!)^2}$

4

OBSERVACIONES

(1) Sea $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|c_n\|}=L$, entonces:

i) Si L = 0, entonces (R = ∞); la serie es convergente en todo el plano complejo C

ii) Si L > 0, entonces $R=\frac{1}{L}$

iii) Si L = ∞, entonces (R = 0) converge solamente en el origen.

(2) Sea $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_{n+1}}{c_n}\|=L$, entonces:

i) Si L = 0, entonces R = ∞.

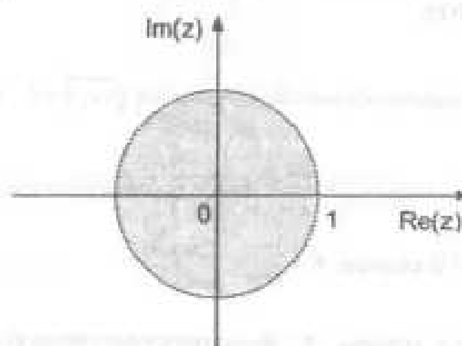
ii) Si L > 0, entonces $R=\frac{1}{L}$

iii) Si L = ∞, entonces R = 0

7.3. FUNCIONES REPRESENTADAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.-

La serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, con radio de convergencia R > 0, define una función de z, es decir: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, donde $D_f=\{z\in C/\|z-z_0\|<R\}$ es decir que el dominio de f(z) es la región de convergencia de la serie, por ejemplo consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+...+z^n+...$ convergente, ∀ z ∈ C tal que $\|z\|<R$

Donde $R=\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_n+1}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{1}\|=1$ es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ es convergente ∀ z ∈ C tal que $\|z\|<1$



Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ define a la función $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$

OBSERVACIÓN.- Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, entonces se dice que f(z) es representada mediante la serie de potencia o se dice que f(z) esta desarrollado mediante una serie de potencia.

Ejemplo.-

(1) $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n$, converge ∀ z ∈C tal que $\|z\|<R$,

donde $R=\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|$ entonces $R=\lim_{n\to\infty}\|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\|=1$

(2) $\frac{1}{1-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$, converge ∀ z ∈ C tal que $\|z\|<R$

7.4. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES.-

Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente ∀ z ∈ C tal que $\|z-z_0\|<R$, R > 0 entonces:

$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1}$, convergente ∀ z ∈ C, tal que $\|z-z_0\|<R'$ donde $R=\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|$, entonces se tiene:

$$R'=\lim_{n\to\infty}\|\frac{nc_n}{(n+1)c_{n+1}}\|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|=1.\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|=R$$

por lo tanto $R=R'$

$f''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2}$, converge ∀ z ∈ C, tal que $\|z-z_0\|<R''$, de donde

$$R''=\lim_{n\to\infty}\|\frac{n(n-1)c_n}{n(n+1)c_{n+1}}\|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n(n+1)}.\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|=1.\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|=R$$

por lo tanto $R=R''$

Las series obtenidas, derivando de la serie de potencia original tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente ∀ z ∈ C tal que

$f'''(z)=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)c_n(z-z_0)^{n-3}\Rightarrow f'''(z)=1.2.3.c_3=3!c_3$ de donde $c_3=\frac{f'''(z_0)}{3!}$

⋮

$f^{(n)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-2)...2.1.c_n(z-z_0)^{n-m}=\sum_{n=m}^{\infty}n!c_n(z-z_0)^{n-m}$ entonces

$f^{(n)}(z_0)=n!c_n$ de donde $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$\|z-z_0\|<R$

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\int_{z_0}^{z}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_{z_0}^{z}(z-z_0)^n dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$, es convergente $\forall z\in C$ tal que $\|z-z_0\|<R$

7.5. SERIE DE TAYLOR Y DE MACLAURIN COMPLEJA.-

Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall\ z\in C$ tal que $\|z-z_0\|<R$, calculando sus derivadas y evaluando en $z=z_0$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z_0)=c_0 \text{ de donde } c_0=f(z_0)$$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0)=c_1 \text{ de donde } c_1=f'(z_0)$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0)=1.2c_2 \text{ de donde } c_2=\frac{f''(z_0)}{2!}$$

como $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, desarrollando

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+...$$

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+...$$

$\therefore$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$ es la serie de Taylor alrededor de $z=z_0$

cuando $z_0=0$, se tiene la serie: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$

que se denomina serie de MACLAURIN

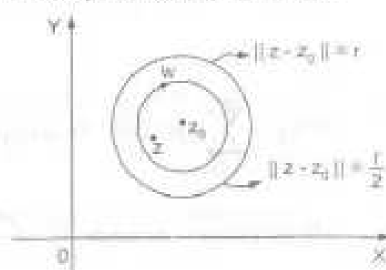
7.6. TEOREMA.-

Sea f(z) una función analítica en z_0, entonces f(z) tiene una representación en serie de Taylor $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$, $\forall$ z en algún disco con centro en z_0

Demostración

Como f es analítica $\Rightarrow$ $\exists$ un disco $\|z-z_0\|<r$ en donde f es derivable, sea $\gamma:\|z-z_0\|=\frac{r}{2}$, entonces f es derivable en todos los puntos sobre y dentro de γ.

Sea $w\in\gamma$ y z cualquier punto dentro de γ, entonces escribiremos



$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \quad ...(1)$$

como w esta más lejos a z_0 que lo de z, entonces $\|z-z_0\|<\|w-z_0\|$ por lo tanto $\|\frac{z-z_0}{w-z_0}\|<1$, mediante la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{w-z_0})^n \quad ...(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{w-z_0})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$

ahora por la fórmula de la integral de Cauchy se tiene:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}](z-z_0)^n \quad ...(3)$$

pero se conoce que: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ ... (4)

al reemplazar (4) en (3) se obtiene: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

que es la representación de la serie de Taylor en un disco abierto de centro z_0

Ejemplo.- Desarrollar en serie de Taylor la función $f(z)=\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}$, alrededor $z_0=-1$ y determinar la región de convergencia.

Desarrollo

A la función f(z) expresaremos en una suma de fracciones

$$f(z)=\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}=\frac{2-3z}{(2z-1)(z-1)}=-\frac{1}{2z-1}-\frac{1}{z-1} \quad ...(1)$$

$$-\frac{1}{2z-1}=\frac{1}{1-2z}=\frac{1}{3-2(z+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}(z+1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{3}(z+1)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}(z+1)^n$$

si $\|\frac{2}{3}(z+1)\|<1 \Rightarrow \|z+1\|<\frac{3}{2}$

$$-\frac{1}{2z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z+1)^n}{3^{n+1}};\ \|z+1\|<\frac{3}{2} \quad ...(2)$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}(z+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}(z+1)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

si $\|\frac{1}{2}(z+1)\|<1 \Rightarrow \|z+1\|<2$

$$-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}};\ \|z+1\|<2 \quad ...(3)$$

ahora reemplazamos (2) y (3) en (1) se tiene: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z+1)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

$$\therefore\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}})(z+1)^n$$

la región de convergencia es: $\{z\in C/\|z+1\|<\frac{3}{2}\wedge\|z+1\|<2\}$ es decir $\{z\in C/\|z+1\|<\frac{3}{2}\}$

7.8. TEOREMA.-

Sea f(z) una función analítica en el anillo $\gamma_1<\|z-z_0\|<\gamma_2$, entonces para z en este

7. SERIE DE LAURENT.-

Si f es analítica en z_0, entonces se puede desarrollar f en una serie de Taylor alrededor de z_0 conteniendo potencia en $z-z_0$ ahora veremos el caso en que f no sea analítica en z_0, si aun podríamos tratar de representar en una serie alrededor de z_0.

Si incluimos potencias de $\frac{1}{z-z_0}$, esta es la idea detrás de la serie de Laurent.

Sea $\gamma_1 : \|z-z_0\| > r$, $\gamma_2 : \|z-z_0\| < R$, $r < R$

$D = \{z \in C / r < \|z-z_0\| < R\}$, la región anular (Disco) acotado por γ_1 y γ_2.

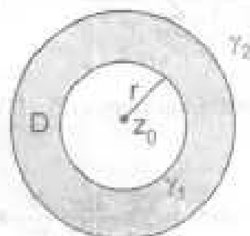
Sea $f: D \subset C \longrightarrow C$, función analítica dentro y sobre la frontera de D, entonces

$\forall z \in D$ se tiene: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$

donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Laurent y $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$;

$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(w)(w-z_0)^{n-1}dw$

En la serie de Laurent

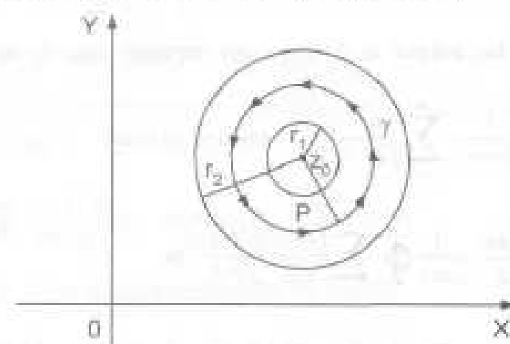


$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se llama parte analítica

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ se llama parte principal

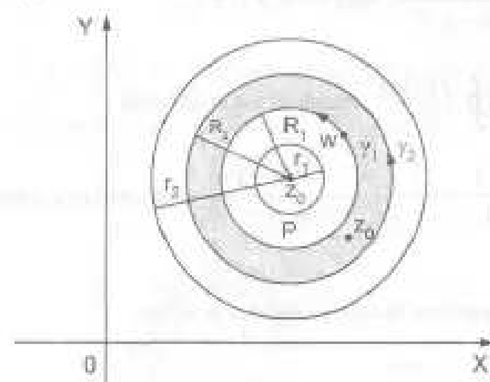
anillo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

y γ es cualquier circunferencia $\|z-z_0\| = \rho$, con $r_1 < \rho < r_2$



Demostración

Sea z en el anillo, elegimos los números R_1 y R_2, tal que $r_1 < R_1 < \|z-z_0\| < R_2 < r_2$, tal como en la figura



Sea $\gamma_2 : \|z-z_0\| = R_2$, la circunferencia de radio R_2 y $\gamma_1 : \|z-z_0\| = R_1$, la circunferencia de radio R_1

Por la fórmula generalizada del teorema de la integral de Cauchy se puede escribir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dz$$

calculando ambas integrales en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Consideremos las integral es de línea por separado para la integral $\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z}$,

escribiremos $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$, entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ donde}$$

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$; para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

para la integral $\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z}$, escribiremos en la forma

$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$, se observa que para $w \in \gamma_1$, se tiene:

$\|\frac{w-z_0}{z-z_0}\| < 1$, luego por la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}, \text{ por lo tanto se tiene:}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1}dw\right]\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

donde $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1}dw$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ ahora utilizamos el teorema de la deformación para remplazar γ_1 y γ_2 con la circunferencia $\gamma_\rho : \|z-z_0\| = \rho$, esto nos permite expresar una fórmula para $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$, en una sola fórmula

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

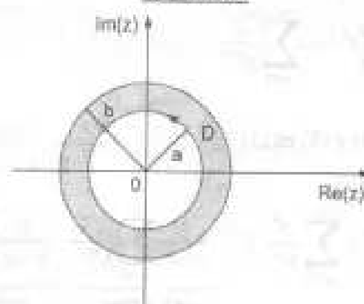
con esta elección de los coeficientes tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\left(\frac{1}{(z-z_0)^n}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \therefore \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Ejemplo.- Si $a < b$, $a, b \in R$, hallar la serie de Laurent de $F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, válida es $D = \{z \in C / a < \|z\| < b\}$

Desarrollo



a F(z) expresaremos en una suma de fracciones parciales

$$F(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{a}{z-a}+\frac{B}{z-b}=\frac{(A+B)z-bA-aB}{(z-a)(z-b)} \qquad \dots (1)$$

de donde $1=(A+B)z-bA-aB$, por identidad

$$\begin{cases}A+B=0\\ -bA-aB=1\end{cases}, \text{ al resolver se tiene: } \begin{cases}A=-\frac{1}{b-a}\\ B=\frac{1}{b-a}\end{cases} \qquad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$F(z)=-\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right]=-\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right] \qquad \dots (3)$$

1ro. Para $\|z\|>a$, $\Rightarrow\ \frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)$

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n} \qquad \dots (4)$$

2do. Para $\|z\|<b \ \Rightarrow\ \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-z}=-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right)$

$$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} \qquad \dots (5)$$

ahora reemplazamos (4) y (5) en (3)

$$F(z)=-\frac{1}{b-a}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right]=\underbrace{-\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}}_{\text{parte analítica}}\ \underbrace{-\frac{1}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}}_{\text{parte principal}}$$

7.9. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Si $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ es divergente y si $\|z_n\|\geq\|w_n\|$ para n = 1, 2, 3, ... demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}\|z_n\|$ es divergente.

Desarrollo

Demostraremos por el absurdo:

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\|z_n\|$ es convergente (pues es absolutamente convergente), como $\|z_n\|\geq\|w_n\|$ (por hipótesis) para n = 1, 2, 3, ..., por el "criterio de comparación para convergencia absoluta" la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ es divergente $\Rightarrow \Leftarrow$. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\|z_n\|$ es divergente.

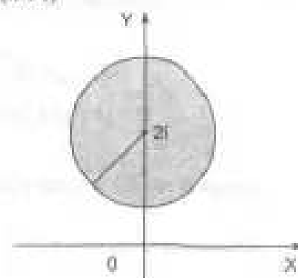
② Determinar la región de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n$

Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón: $u_n=\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n \ \Rightarrow\ u_{n+1}=\frac{n+2}{n}(z-2i)^{n+1}$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{n+2}{n}(z-2i)^{n+1}}{\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\|z-2i\|=\|z-2i\|<1$$

Luego la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n$ es absolutamente convergente es la región $\|z-2i\|<1$



OTRO MÉTODO.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n$ es absolutamente convergente $\forall z\in C \ / \ \|z-2i\|<R$ donde

$$R=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{n+1}{n-1}}{\frac{n+2}{n}}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}=1$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^n$ es absolutamente convergente $\forall z\in C/\|z-2i\|<1$

③ Determinar la región de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}z^n$

Desarrollo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ es absolutamente convergente $\forall z\in C$ tal que $\|z\|<R$.

$$\text{donde: } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n.\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{(-1)^{n+1}.\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2.\frac{(2n)!}{(2n)!.(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4} \ \Rightarrow\ R=\frac{1}{4}$$



④ Hallar la región, radio de convergencia de la serie, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n}$ y su suma.

Desarrollo

Sea $u_n=\frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n} \ \Rightarrow\ u_{n+1}=\frac{(z+1)^{n+1}}{2^{n+1}(z-1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{(z+1)^{n+1}}{2^{n+1}(z-1)^{n+1}}}{\frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n}}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\frac{z+1}{z-1}\right\|<1$$

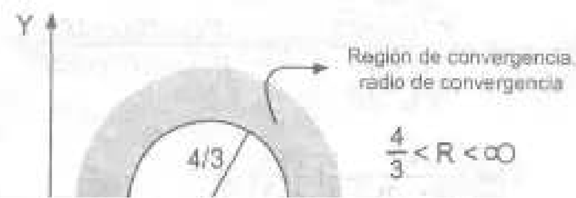
$\left\|\frac{z+1}{z-1}\right\|<2 \ \Rightarrow\ \|z+1\|<2\|z-1\|$ elevando al cuadrado

$\|z+1\|^2<4\|z-1\|^2$ de donde $(z+1)(\bar{z}+1)<4(z-1)(\bar{z}-1)$

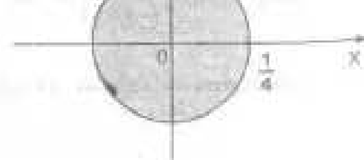
$z\bar{z}+z+\bar{z}+1<4(z\bar{z}-z-\bar{z}+1) \ \Rightarrow\ 3z\bar{z}-5(z+\bar{z})+3>0$

$z\bar{z}-\frac{5}{3}(z+\bar{z})+1>0$, factorizando $(z-\frac{5}{3})(\bar{z}-\frac{5}{3})-\frac{25}{9}+1>0 \Rightarrow (z-\frac{5}{3})(\bar{z}-\frac{5}{3})-\frac{16}{9}>0$

de donde $\|z-\frac{5}{3}\|^2>\frac{16}{9} \ \Rightarrow \|z-\frac{5}{3}\|>\frac{4}{3}$ es la región de convergencia



Luego la región de convergencia o disco de convergencia es $\| z \| < \frac{1}{4}$



Calculando la suma de la serie, para esto aplicamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-r},\ r \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n} = 1 + \left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^1 + \left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2(z-1)}} = \frac{2(z-1)}{z-3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n} = 1 + \frac{z+1}{2(z-1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n} = \frac{2(z-1)}{z-3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n} = \frac{2(z-1)}{z-3} - \left(1 + \frac{z+1}{2(z-1)}\right) = \frac{(z+1)^2}{2(z-3)(z-1)}$$

(5) Si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^n (z-2)^n}$, hallar la región de convergencia, radio de convergencia y suma de la serie.

Desarrollo

$$u_n = \frac{(z+2)^n}{3^n (z-2)^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(z+2)^{n+1}}{3^{n+1}(z-2)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\frac{(z+2)^{n+1}}{3^{n+1}(z-2)^{n+1}}}{\frac{(z+2)^n}{3^n(z-2)^n}} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{3^n (z-2)^n (z+2)^{n+1}}{3^{n+1}(z-2)^{n+1}(z+2)^n} \right\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{z+2}{3(z-2)} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \frac{z+2}{z-2} \right\| < 1$$

$\left\| \frac{z+2}{z-2} \right\| < 3 \Rightarrow \| z+2 \| < 3 \| z-2 \|$, elevando al cuadrado

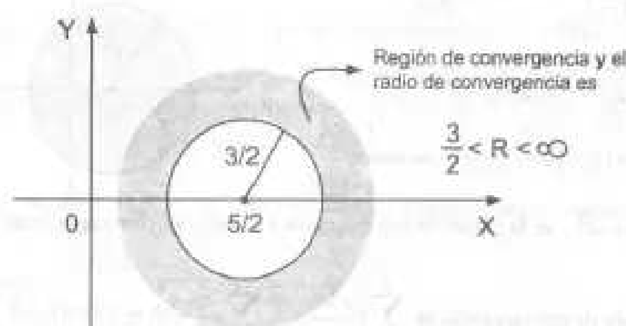
$\| z+2 \|^2 < 9 \| z-2 \|^2 \Rightarrow (z+2)(\bar{z}+2) < 9(z-2)(\bar{z}-2)$

$z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 < 9(z\bar{z} - 2z - z\bar{z} + 4)$, simplificando

$8z\bar{z} - 20z - 20\bar{z} + 32 > 0 \Rightarrow z\bar{z} - \frac{5}{2}(z+\bar{z}) + 4 > 0$

$(z-\frac{5}{2})(\bar{z}-\frac{5}{2}) - \frac{25}{4} + 4 > 0 \Rightarrow (z-\frac{5}{2})(\overline{z-\frac{5}{2}}) - \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow \| z - \frac{5}{2} \|^2 > \frac{9}{4}$

de donde $\| z - \frac{5}{2} \| > \frac{3}{2}$ es la región de convergencia



(6) Hallar la región de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n$

Desarrollo

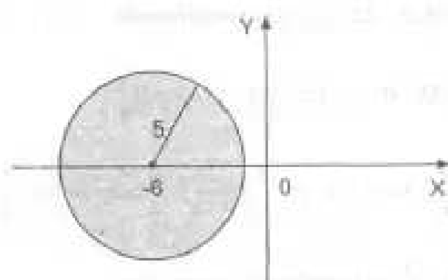
Calcularemos la región de convergencia de cada serie

$$u_n = \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(z+6)^{n+1}}{(4-3i)^{n+1}} = \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{z+6}{4-3i} \right\| = \left\| \frac{z+6}{4-3i} \right\| < 1$$

de donde $\| z+6 \| < \| 4-3i \| = \sqrt{16+9} = 5$

Luego $\| z+6 \| < 5$ es la región de convergencia donde el radio de convergencia es $R = 5$



$$u_n = \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{z+1}{2-i} \right\| = \left\| \frac{z+1}{2-i} \right\| < 1$$

$\Rightarrow \| z+1 \| < \| 2-i \| = \sqrt{5}$ de donde

$\| z+1 \| < \sqrt{5}$, es la región de convergencia y el radio de convergencia es $R = \sqrt{5}$

La región de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n$ es $\| z+6 \| < 5 \ \wedge \ \| z+1 \| < \sqrt{5}$



Sea $u_n = \left(\frac{z+7i}{4z-8i}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{z+7i}{4z-8i}\right)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{z+7i}{4z-8i} \right\| = \left\| \frac{z+7i}{4z-8i} \right\| < 1$$

$\left\| \frac{z+7i}{4z-8i} \right\| < 1 \Leftrightarrow \| z+7i \| < \| 4z-8i \|$, elevando al cuadrado

$\| z+7i \|^2 < \| 4-8i \|^2 \Rightarrow (z+7i)(\bar{z}-7i) < (4z-8i)(4\bar{z}+8i)$

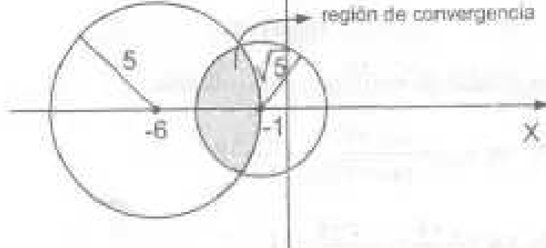
$z\bar{z} - 7i(z-\bar{z}) + 49 < 16z\bar{z} + 32i(z-\bar{z}) + 64$, simplificando $15z\bar{z} + 39i(z-\bar{z}) + 15 > 0$

de donde $z\bar{z} + \frac{39}{15}i(z-\bar{z}) + 1 > 0$, factorizando $(z - \frac{39}{15}i)(\bar{z} + \frac{39}{15}i) - \frac{1521}{225} + 1 > 0$

$\| z - \frac{39}{15}i \|^2 > \frac{1396}{225} \Rightarrow \| z - \frac{39}{15}i \| > \frac{2\sqrt{349}}{15}$ es la región de convergencia y el radio de convergencia $\frac{2\sqrt{349}}{15} < R < \infty$

(8) Halla región de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{9^n z^n}\right)$

Desarrollo



7) **Hallar la región de convergencia y el radio de convergencia de la serie** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+7}{4z-8i}\right)^n$

Desarrollo

Desarrollo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{9^n z^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n z^n}$$

Sea $u_n=z^n \Rightarrow u_{n+1}=z^{n+1}$, por el criterio de la razón

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\|z\|=\|z\|<1$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ es absolutamente convergente en $\|z\|<1$

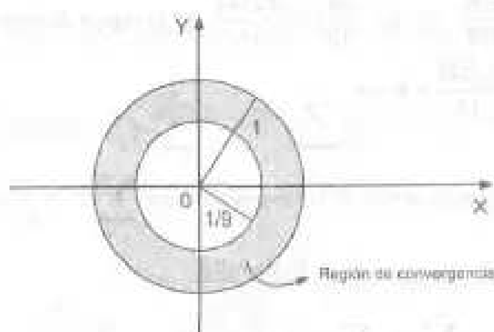
Sea $u_n=\frac{1}{9^n z^n} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{9^{n+1}z^{n+1}}$, por el criterio de la razón

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{1}{9^{n+1}z^{n+1}}}{\frac{1}{9^n z^n}}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{9^n z^n}{9^{n+1}z^{n+1}}\right\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\left\|\frac{1}{z}\right\|=\frac{1}{9}\left\|\frac{1}{z}\right\|<1 \Rightarrow \|z\|>\frac{1}{9}$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n z^n}$ es absolutamente convergente en $\|z\|>\frac{1}{9}$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{9^n z^n}\right)$ es convergente en el anillo $\frac{1}{9}<\|z\|<1$



8) Hallar la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$

Desarrollo

Calculando la región de convergencia de cada serie

$u_n=\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}(z-1)^{n+2}}$, por el criterio de la razón

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}(z-1)^{n+2}}}{\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}}\right\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{2^n(z-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}(z-1)^{n+2}n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{n+1}{2n(z-1)}\right\|=\left\|\frac{1}{2(z-1)}\right\|<1$$

$\left\|\frac{1}{2(z-1)}\right\|<1 \Rightarrow \|z-1\|>\frac{1}{2}$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}$ es absolutamente convergente en $\|z-1\|>\frac{1}{2}$

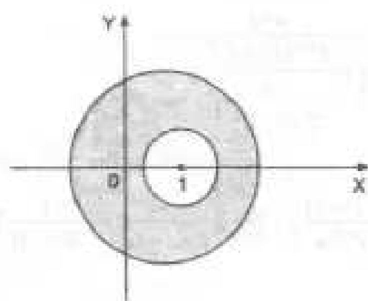
$u_n=\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{(n+1)(z-1)^n}{3^{n+1}}$, por el criterio de la razón

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{(n+1)(z-1)^n}{3^{n+1}}}{\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}}\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3^n(n+1)(z-1)^n}{3^{n+1}n(z-1)^{n-1}}\right\|$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\|z-1\|=\frac{1}{3}\|z-1\|<1$$

$\frac{1}{3}\|z-1\|<1 \Rightarrow \|z-1\|<3$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$ es absolutamente convergente en $\|z-1\|<3$

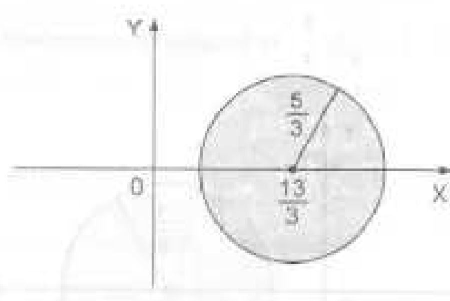
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$ es convergente es el anillo $\frac{1}{2}<\|z-1\|<3$



10) **Hallar la región de convergencia y el radio de convergencia de la serie** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(z-4)^n}{(z+4)^n}$

Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón: $u_n=\frac{5^n(z-4)^n}{(z+4)^n} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{5^{n+1}(z-4)^{n+1}}{(z+4)^{n+1}}$



11) Dado la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(1-z)^n}{(1+z)^n}$, hallar:

a) La región de convergencia.

b) El radio de convergencia.

c) La suma de la serie

Desarrollo

$$L=\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{\frac{5^{n+1}(z-4)^{n+1}}{(z+4)^{n+1}}}{\frac{5^n(z-4)^n}{(z+4)^n}}\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\|\frac{5^{n+1}(z+4)^n(z-4)^{n+1}}{5^n(z+4)^{n+1}(z-4)^n}\|=5\|\frac{z-4}{z+4}\|<1$$

$5\|\frac{z-4}{z+4}\|<1 \Rightarrow 5\|z-4\|<\|z+4\|$ elevando al cuadrado

$35\|z-4\|^2<\|z+4\|^2 \Rightarrow 25(z-4)(\bar z-4)<(\bar z+4)(z+4)$

$25z\bar z-100z-100\bar z+400<z\bar z+4z+4\bar z+16 \Rightarrow 24z\bar z-104(\bar z+z)+384<0$

$z\bar z-\frac{13}{3}(\bar z+z)+16<0$, factorizando $(z-\frac{13}{3})(\bar z-\frac{13}{3})-\frac{169}{9}+16<0$, de donde

$\|z-\frac{13}{3}\|^2<\frac{25}{9} \Rightarrow \|z-\frac{13}{3}\|<\frac{5}{3}$ es la región de convergencia y $R=\frac{5}{3}$ es el radio de convergencia.

Sea $u_n=\frac{3^n(1-z)^n}{(1+z)^n} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(1-z)^{n+1}}{(1+z)^{n+1}}$, de donde

$$L=\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{\frac{3^{n+1}(1-z)^{n+1}}{(1+z)^{n+1}}}{\frac{3^n(1-z)^n}{(1+z)^n}}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{3^{n+1}(1-z)^{n+1}(1+z)^n}{3^n(1-z)^n(1+z)^{n+1}}\|=3\|\frac{1-z}{1+z}\|<1$$

$3\|\frac{1-z}{1+z}\|<1 \Rightarrow 3\|1-z\|<\|1+z\|$ elevando al cuadrado

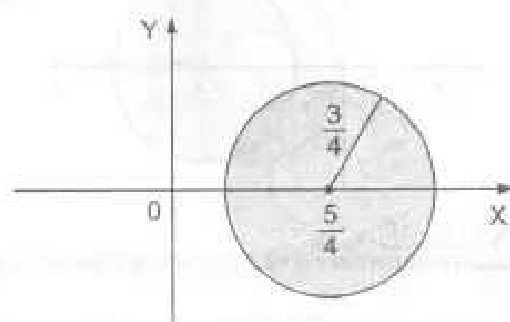
$9\|1-z\|^2<\|1+z\|^2 \Rightarrow 9(1-z)(1-\bar z)<(1+z)(1+\bar z)$

$9(1-z-\bar z+z\bar z)<1+\bar z+z+z\bar z$, simplificando

$8z\bar z-10z-10\bar z+8<0 \Rightarrow z\bar z-\frac{5}{4}z-\frac{5}{4}\bar z+1<0$

$z\bar z-\frac{5}{4}(z+\bar z)+1<0 \Rightarrow (z-\frac{5}{4})(\bar z-\frac{5}{4})-\frac{25}{16}+1<0$

$\|z-\frac{5}{4}\|^2<\frac{9}{16} \Rightarrow \|z-\frac{5}{4}\|<\frac{3}{4}$ es la región de convergencia y $R=\frac{3}{4}$ es el radio de convergencia.



Ahora veremos la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(1-z)^n}{(1+z)^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(1-z)^n}{(1+z)^n}=1+(\frac{3(1-z)}{1+z})^1+(\frac{3(1-z)}{1+z})^2+\dots=\frac{1}{1-\frac{3(1-z)}{1+z}}=\frac{1+z}{1+z-3(1-z)}=\frac{1+z}{4z-2}$$

(12) Hallar la región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+3i}{3z+5i})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{6}{z+3i})^n$

Desarrollo

Calculando la región de convergencia de cada una de la series de potencias.

i) Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+3i}{3z+5i})^n$

$u_n=(\frac{z+3i}{3z+5i})^n \Rightarrow u_{n+1}=(\frac{z+3i}{3z+5i})^{n+1}$, aplicando el criterio de la razón

$$L=\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{(\frac{z+3i}{3z+5i})^{n+1}}{(\frac{z+3i}{3z+5i})^n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{z+3i}{3z+5i}\|=\|\frac{z+3i}{3z+5i}\|<1$$

La serie converge absolutamente sí y solo si

$\|\frac{z+3i}{3z+5i}\|<1 \Leftrightarrow \|z+3i\|<\|3z+5i\|$, de donde

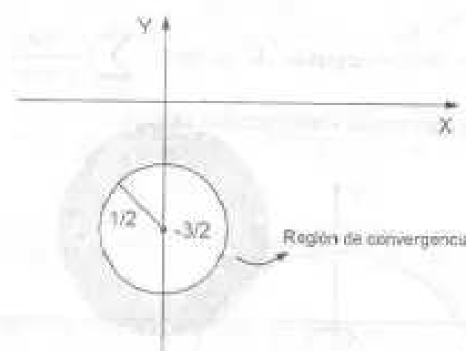
$\|x+(y+3)i\|<\|3x+(3y+5)i\| \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2}<\sqrt{9x^2+(3y+5)^2}$

$x^2+(y+3)^2<9x^2+(3y+5)^2$, desarrollando

$x^2+y^2+6y+9<9x^2+9y^2+30y+25$, simplificando

$x^2+y^2+3y>-2$, completando cuadrado se tiene:

$x^2+(y+\frac{3}{2})^2>\frac{1}{4}$ de donde $\frac{1}{2}<R<\infty$



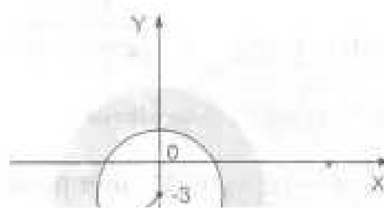
ii) Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{(z+3i)^n}$, de donde

$u_n=\frac{6^n}{(z+3i)^n} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{6^{n+1}}{(z+3i)^{n+1}}$, entonces

$$L=\lim_{n\to\infty}\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{\frac{6^{n+1}}{(z+3i)^{n+1}}}{\frac{6^n}{(z+3i)^n}}\|=\lim_{n\to\infty}\|\frac{6^{n+1}(z+3i)^n}{6^n(z+3i)^{n+1}}\|=\|\frac{6}{z+3i}\|<1$$

la serie converge absolutamente si y sólo si

$6\|\frac{1}{z+3i}\|<1 \Leftrightarrow \|z+3i\|>6$



$f(z)=\text{sen } z \qquad f(0)=0$

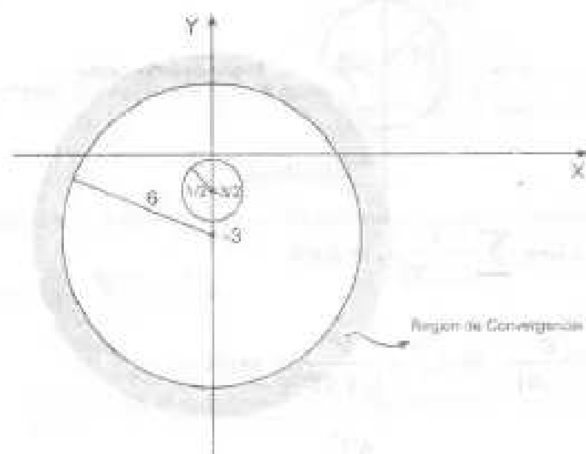
$f'(z)=\cos z \qquad f'(0)=1$

$f''(z)=-\text{sen } z \quad \Rightarrow \quad f''(0)=0$

$f'''(z)=-\cos z \qquad f'''(0)=-1$

$f^{iv}(z)=\text{sen } z \qquad f^{iv}(0)=0$

Luego la región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+3i}{3z+5i})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{(z+3i)^n}$ es la intersección de las regiones de convergencias, es decir:



(13) Hallar la serie de Taylor de f(z) = sen z, alrededor de z = 0.

Desarrollo

$f(z)=sen z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$, desarrollando se tiene:

$$f(z)=sen z=f(0)+\frac{f'(0)z}{1!}+\frac{f''(0)z^2}{2!}+\frac{f'''(0)z^3}{3!}+\frac{f^{iv}(0)z^4}{4!}+\frac{f^{v}(0)z^5}{5!}+...$$

$$=0+z+0-\frac{1}{3!}z^3+0+\frac{1}{5!}z^5+...=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall z\in C$ es convergente.

(14) Hallar la serie de Taylor de f(z) = cosh z, alrededor de z = 0

Desarrollo

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+...$$

f(z) = cosh z   f(0) = 1

$f'(z)=senh z$ $f'(0)=0$

$f''(z)=\cosh z$ $\Rightarrow$ $f''(0)=1$

$f'''(z)=senh z$ $f'''(0)=0$

$f^{iv}(z)=\cosh z$ $f^{iv}(0)=1$

.
.
.

$$f(z)=\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \|z\|<\infty$$

$$\therefore\ f(z)=\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2n)!}$$

(15) Verificar que $f(z)=sen^3 z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3-3^{2n+1})z^{2n+1}}{3(2n+1)!}$

Desarrollo

Sabemos que $sen^3 z=\frac{3}{4}senz-\frac{1}{4}sen3z$, por lo tanto de acuerdo al ejercicio (13) se tiene:

$$f(z)=sen^3 z=\frac{3}{4}senz-\frac{1}{4}sen3z=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3-3^{2n+1})z^{2n+1}}{3(2n+1)!}$$

(16) ¿La función $f(z)=\frac{3+2z}{z+z^2}$ se puede desarrollar como serie de Taylor alrededor de z = 0?

Desarrollo

f(z) no es analítico en z = 0 $\Rightarrow$ no es desarrollable como serie de Taylor, sin embargo se puede desarrollar como una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

$$f(z)=\frac{3+2z}{z+z^2}=\frac{1}{z}(\frac{2z+3}{z+1})=\frac{1}{z}(2+\frac{1}{z+1}) \quad ...(1)$$

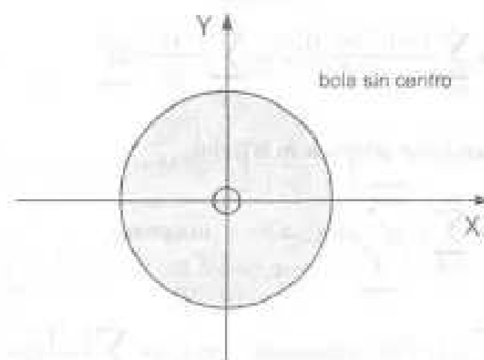
pero $\frac{1}{z+1}$ es analítico en z = 0, entonces su representación

$$\frac{1}{z+1}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad ...(2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$f(z)=\frac{1}{z}(2+\frac{1}{1+z})=\frac{1}{z}(2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n)=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}$$

$f(z)=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}$, convergente en $0<\|z\|<1$



(17) Hallar la serie de Taylor alrededor de z = 0 de la función $f(z)=\ln(\frac{1+z}{1-z})$

Desarrollo

Como $f(z)=\ln(\frac{1+z}{1-z})=\ln(1+z)-\ln(1-z)$ ... (1)

Calculando la serie de ln (1 + z) alrededor de z = 0

$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$, serie de Taylor, donde

$$= \frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(z-1-i)}{1-3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z-1-i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$$

convergente $\forall z \in C \,/\, 3\|\frac{z-1-i}{1-3i}\| < 1 \Rightarrow \|z-1-i\| < \frac{\sqrt{10}}{3} = R$

(20) Demuestre que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para $\|z-z_0\| < R$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ para $\|z-z_0\| < R$, entonces: $f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n$, para $\|z-z_0\| < R$

Desarrollo

$\forall z \in C$ tal que $\|z-z_0\| < R$ y todo entero $m > 0$ se tiene:

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n - f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n - g(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n > 0$ tal que $\forall m > N$, se tiene:

$$\|\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n - (f(z) \pm g(z))\| = \|\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(z-z_0)^n - f(z)) \pm \sum_{n=0}^{\infty}(b_n(z-z_0)^n - g(z))\|$$

$$\leq \|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n - f(z)\| \pm \|\sum_{n=0}^{\infty}(b_n(z-z_0)^n - g(z)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego $\|\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n - (f(z) \pm g(z))\| < \varepsilon$, $\forall$ m > N

Por lo tanto: $f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n$, $\forall z \in C \,/\, \|z-z_0\| < R$

(21) Desarrollar la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, en serie de Laurent en el disco $\|z\| < 1$

Desarrollo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}, \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1} = -1 \\ B = \lim_{z\to 2}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Luego $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

(22) Desarrollar la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, en serie de Laurent en el anillo $1 < \|z\| < 2$

Desarrollo

$$\|z\| > 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\|z\|} < 1}_{\text{parte principal}} \quad \wedge \|z\| < 2 \Rightarrow \underbrace{\frac{\|z\|}{2} < 1}_{\text{parte analítica}}$$

del ejercicio (21) se tiene la descomposición de f(z)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

23) Desarrolle la función $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, en una vecindad del punto $z=2$ y el anillo $1\le\|z\|<2$

Desarrollo

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-2)^{-n}$$

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z+i)(z-i)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-i}$$

calculando los valores de A, B y C se tiene:

$$A=\lim_{z\to2}\frac{z^2-2z+5}{z^2+1}=\frac{4-4+5}{5}=1$$

$$B=\lim_{z\to-i}\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z-i)}=\frac{-1+2i+5}{(-i-2)(-2i)}=\frac{2(i+2)}{2i(i+2)}=-i$$

$$C=\lim_{z\to i}\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z+i)}=\frac{-1-2i+5}{(i-2)(2i)}=\frac{2(2-i)}{(-2i)(2-i)}=i,\quad \text{por lo tanto}$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{i}{z+i}+\frac{i}{z-i}=\frac{1}{z-2}-\frac{i}{(z-2)+(2+i)}+\frac{i}{(z-2)+(2-i)}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{i}{(2+i)(1+\frac{z-2}{2+i})}+\frac{i}{(2-i)(1+\frac{z-2}{2-i})}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{i}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n+\frac{i}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n$$

esto vale si $\|\frac{z-2}{2+i}\|<1 \ \wedge\ \|\frac{z-2}{2-i}\|<1$

entonces $f(z)=\frac{1}{z-2}-i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2+i)^{n+1}}-\frac{1}{(2-i)^{n+1}}\right](z-2)^n$

$\|z-2\|<\|2+i\| \ \wedge\ \|z-2\|<\|2-i\| \Rightarrow \|z-2\|<\sqrt{5}$

24) Determinar la serie de Laurent de $f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}$ en $\|z\|<1$

Desarrollo

Descomponiendo un sumas parciales a la función racional

$$f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{z+2}+\frac{1}{z-1}\right] \quad \text{... (1)}$$

$$\frac{2}{z+2}=\frac{2}{2(1+\frac{z}{2})}=\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} \quad \text{si } \|z\|<2 \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad \text{si } \|z\|<1 \quad \text{... (3)}$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

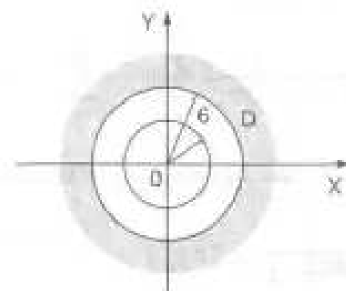
$$f(z)=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)z^n \quad \text{para } \|z\|<1$$

25) Obtenga la serie de Laurent para la función $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ en el dominio D: $\|z\|>b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b>a$

Desarrollo

Expresamos a f(z) en una descomposición de las fracciones parciales

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=-\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right) \quad \text{... (1)}$$



como el desarrollo requiere que sea válido en el dominio D del gráfico para el cual $\|z\|>b$ no se puede utilizar el desarrollo de $\frac{1}{z-b}$ que es válido para $\|z\|<b$, en su lugar se tiene:

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z(1-\frac{b}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{n-1}}{z^n} \quad \text{para } \|z\|>b$$

como $b>a \Rightarrow \|z\|>a$ se hace en la misma forma

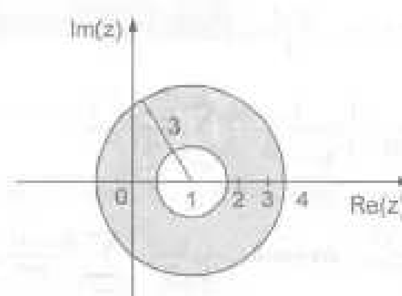
$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z(1-\frac{a}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}, \text{ para } \|z\|>a \text{ y por lo tanto } \|z\|>b$$

ahora reemplazamos en (1) se obtiene:

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=-\frac{1}{b-a}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{n-1}}{z^n}\right]$$

$$\therefore\ f(z)=-\frac{1}{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{z^n} \quad \text{para } \|z\|>b$$

NOTA.- Como para n = 1 el primer término es cero por eso ponemos para n = 2.



1ro. Para $\|z-1\|>\frac{1}{2}$ entonces $\frac{1}{2\|z-1\|}<1$

$$\frac{1}{4-z}=\frac{1}{3-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{z-1}}\right)=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^n}$$

$$\frac{1}{4-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}},\ \text{derivando}\ \frac{1}{(4-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{(z-1)^{n+2}}$$

$$\frac{3}{(4-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1).3^{n+1}}{(z-1)^{n+2}} \quad \text{... (1)}$$

$$\frac{1}{2z-3}=\frac{1}{2(z-1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2(z-1)}}=\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^n}$$

$$\frac{1}{2z-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(z-1)^{n+1}},\ \text{derivando}\ \frac{2}{(2z-3)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}(z-1)^{n+2}} \quad \text{... (2)}$$

sumando miembro a miembro (1) y (2) se tiene:

(26) Hallar la serie de Laurent de la función dada $f(z)=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2}$, válida para $\frac{1}{2}<\|z-1\|<3$

Desarrollo

$$\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1).3^{n+1}}{(z-1)^{n-2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}(z-1)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}((n+1).3^{n+1}+\frac{n+1}{2^{n+1}})\frac{1}{(z-1)^{n-2}} \qquad \dots(3)$$

2do. Para $\|z-1\|<3 \Rightarrow \|\frac{z-1}{3}\|<1$

$$\frac{1}{4-z}=\frac{1}{3-(z-1)}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}$$

$\frac{1}{4-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, derivando $\frac{1}{(4-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$, de donde

$$\frac{3}{(4-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n} \qquad \dots(4)$$

$\frac{1}{2z-3}=\frac{1}{-1+2(z-1)}=-\frac{1}{1-2(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-1)^n$, derivando

$$\frac{2}{(2z-3)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}2^n n(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(n+1)(z-1)^n$$

$$\frac{2}{(2z-3)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(n+1)(z-1)^n \qquad \dots(5)$$

sumando miembro a miembro (4) y (5) se tiene:

$$\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z-1)^n}{3^n}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{n+1}{3^n}-2^{n+1}(n+1)](z-1)^n \qquad \dots(6)$$

por lo tanto de (3) y (6) se tiene:

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\frac{1}{3^n}-2^n)(z-1)^n}_{\text{parte analítica}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(3^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}})\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}_{\text{parte principal}}$$

7.10. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Dada la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z+6i}{3z-7i})^n$, hallar:

a) La región de convergencia b) Radio de convergencia c) suma de la serie

(2) Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+4i}{3z-5i})^n$ en C, hallar:

a) región y radio de convergencia b) Su suma

(3) Hallar el radio de convergencia y la suma de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n+1}$

(4) Hallar el intervalo de convergencia y analizar los extremos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z)^n}$

(5) Hallar el intervalo de convergencia y analizar en los extremos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1)^n}{3^n n^3}$

(6) Calcular el dominio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2z}$

(7) Hallar la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z+2i}{3+4i})^n$

(8) Hallar la región de convergencia y suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$

(9) Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(z^{3n}-z^{2.3^n})$

(10) Calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\frac{n}{2}}e^{i\frac{\pi n}{4}}$

(11) Hallar la región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{4^n z^n})$

(12) Hallar la región y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(z^n+\frac{1}{2^n z^n})$

(13) Hallar la región y radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{6}{z+3i})^n$

(14) Hallar la región y radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2z-3)^n}{(1-z)^n}$

(15) Hallar la región y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}z^n$

(16) Hallar el campo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$

(20) Hallar la región de convergencia y la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$

(21) Hallar el radio y región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+3i}{3z+5i})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{6}{z+3i})^n$

(22) Hallar la región y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{4^n z^n})$

(23) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ converge para $\|z\|\le 1$

(24) Hallar la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

(25) Hallar la región de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,z^n$

(26) ¿Para qué valores de z la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z^2+1)^n}$ converge?

17 Hallar la región de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\pi}{2})^n(z-i\frac{\pi}{2})^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{i+n})^n$

18 Halla la región de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}5^n(z+2i)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n}$

19 Hallar la región de convergencia y la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n+1}})$

27 Determinar el conjunto de valores de z para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

28 Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\|z\|}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\|z\|}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\|z\|}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+z}$

29 Hallar la región de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2.3^n}(\frac{z+1}{z-1})^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}$

30 Estudiar la región de convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n(z-i)^n}{4^n(n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

31 Hallar la región de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

32 Encuentre el radio de convergencia y el disco de convergencia de las series siguientes:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(z+3i)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}(z-i)^{2n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n+2}(z-3)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}(z-1+2i)^n$

3) Encuentre el radio de convergencia y el disco de convergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3i})^n(z+1+4i)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^{n+1}}(z+4-i)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2n+1}(z+6+2i)^{2n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}(z-3)^{2n}$

) Encuentre el radio de convergencia y el disco de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in}}{2n+1}(z+4)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-i}{2+i})^n(z-3)^{3n}$

) Demuestre que: Si $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=S$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{z_n}=\overline{S}$

) Determine el radio de convergencia de las series

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$

37 Determine el radio de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{n!}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in).z^n$ f) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$

38 Sea $\lambda\in C$, comprobar que: $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n=\frac{1}{1-\lambda}$, $\|\lambda\|<1$

39 Probar que: $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{z_0})^n$, converge uniformemente para todo disco cerrado: $\|z\|\le r<\|z_0\|$

40 Determinar las regiones en las cuales cada una de las siguientes series es uniformemente convergente

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^{2n}}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)z^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+\|z\|^2}$

41 Use el criterio del cociente para demostrar que las siguientes series convergen absolutamente en el dominio indicado.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}n!e^{in^2z}$, cuando $Im(z)>0$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}$, cuando $\|z\|>0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-2n}(z+i)^{n+1}}{n}$, cuando $\|z+i\|<4$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1-i)^{2n}}$, cuando $\|z-1-i\|>\sqrt{2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{z}{n})^n$, cuando $\|z\|<e$

2) Halle los conjuntos en los que converge uniformemente las series dadas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(z^n+\frac{1}{z^n})$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nz}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-z\ln(n)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nz)}{n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nz)}{n}$

3) Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado.

a) $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $z_0=4i$ b) $f(z)=e^z$, $z_0=-3i$

c) $f(z)=\frac{1}{2+z}$, $1-8i$ d) $f(z)=1+\frac{1}{2+z^2}$, $z=i$

Desarrollar la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado.

50 Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado

a) $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$, $z_0=0$ b) $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0=1$

c) $f(z)=\frac{1}{z^2}$, $z_0=1+i$ d) $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$, $z_0=2$

51 Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado.

a) $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$, $z_0=2$ b) $f(z)=\frac{e^z}{(z-2)(z+1)}$, $z_0=0$

52 Desarrolle las funciones en una serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ y halle el radio de convergencia.

a) $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$, $z_0=0$ b) $f(z)=\frac{1}{z-2-4i}$, $z_0=-2i$

c) $f(z)=e^z - sen z$, $z_0=0$ d) $f(z)=\cos z^2 - sen z$, $z_0=0$

15 Demostrar que $e^z = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$, $(\| z \| < \infty)$

16 Hallar la serie de Maclaurin de la función $f(z)=\frac{z}{z^4+9}$

17 Deducir la representación en serie de Taylor $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$, $\| z-i \| < \sqrt{2}$

18 Demostrar que para $0 < \| z \| < 4$, $\frac{1}{4z-z^2}=\frac{1}{4z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}$

19 Desarrolle $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ en serie de MACLAURIN

a) $f(z)=\frac{z}{z^2-4z+13}$ b) $f(z)=\ln(\frac{1+z}{1-z})$

c) $f(z)=\ln(z^2-3z+2)$ d) $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$

53 Desarrolle las funciones dadas en una serie de potencias de $z-1$ y halle el radio de convergencia

a) $f(z)=\frac{z}{z+2}$ b) $f(z)=\frac{z}{z^2-2z+5}$ c) $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$

54 Demuestre que los coeficientes c_n del desarrollo $\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$, verifican la relación $c_n = c_{n-1}+c_{n-2}$, $n \geq 2$. Halle c_n y el radio de convergencia de la serie.

55 Hallar la serie de Laurent de $f(z)=\frac{8}{(2z-9)^3}+\frac{216}{(10-z)^3}$, valido para el anillo $\frac{1}{2} < \| z-4 \| < 6$

74 Encuentre la serie de Laurent de la función $f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}$ en las regiones indicadas.

a) $\| z \| < 1$ b) $0 < \| z-1 \| < 3$ c) $0 < \| z+2 \| < 3$

d) $1 < \| z \| < 2$ e) $\| z \| > 2$ f) $\| z+2 \| > 3$

75 Escribir las dos series de Laurent en potencias de z que representan a la función $f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$ en ciertos dominios.

CAPÍTULO VIII

8 TEORÍA DE LAS SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

(76) Desarrolle $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ en serie de Laurent alrededor de i.

(77) Desarrolle $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-3i)}$ en una serie de Laurent alrededor de -1.

(78) Desarrollar $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$ en una serie de Laurent alrededor de $z=2$.

(79) Determine el desarrollo de Laurent de la función alrededor del punto z_0 dado y determine R de manera que el desarrollo sea válido en el anillo $0<\|z-z_0\|<R$.

a) $f(z)=\frac{2z}{1+z^2}$, $z_0=i$ b) $f(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^2}$, $z_0=0$

(80) Determine el desarrollo de Laurent de la función alrededor del punto z_0 dado y determine R de manera que el desarrollo sea válido en el anillo $0<\|z-z_0\|<R$.

a) $f(z)=e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0=-i$ b) $f(z)=senh(\frac{1}{z^2})$, $z_0=0$

8.1. SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad de una función F, si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0, excepto en z_0 mismo.

Existen varios tipos de singularidades.

1° SINGULARIDAD AISLADA.- El punto $z=z_0$ es una singularidad aislada o un punto singular aislado de F(z) si F(z) si $\exists\,\delta>0$, tal que el círculo $\|z-z_0\|=\delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists\, V_\delta(z_0)$ sin singularidad).

Si tal δ ∄, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Si z_0 no es un punto singular y si $\exists\,\delta>0\,/\,\|z-z_0\|=\delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de F(z).

2° POLOS.- Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n F(z)=A\neq 0$, entonces $z=z_0$ es llamado polo de orden n, si $n=1$, z_0 es llamado un polo simple.

Ejemplo.- $f(z)=\frac{1}{(z-2)^3}$, tiene un polo de orden tres en $z=2$.

Ejemplo.- $f(z)=\frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$; tiene un polo de orden 2 en z = 1 y polos simples en z = -1, z = 4.

Si $y(z)=(z-z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0)\neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z=z_0$ es llamado un cero de orden n de y(z).

Si n = 1, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\frac{1}{y(z)}$.

3° LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-

Ejemplos.-

1) $f(z)=(z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en z = 3

2) $f(z)=\ln(z^2+z-2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2+z-2=0$, es decir: z =1, z = -2.

4° SINGULARIDADES REMOVIBLES.- El punto singular z_0 es llamado una singularidad removible de F(z) si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe.

Ejemplo.- El punto singular z = 0, es una singularidad removible de $f(z)=\frac{senz}{z}$, puesto que $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{senz}{z}=1$.

5° SINGULARIDADES ESCENCIALES.- Una singularidad que no sea polo, ni punto de ramificación, ni singularidad removible es llamado una singularidad esencial.

Ejemplo.- $f(z)=e^{\frac{1}{z-2}}$, tiene una singularidad esencial en z = 2 se una función unívoca tiene una singularidad, entonces las singularidades es un polo o una singularidad esencial, por esta razón un polo es llamado algunas veces una singularidad evitable.

Equivalentemente $z=z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún positivo n tal que: $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=A\neq 0$.

6° SINGULARIDAD EN EL INFINITO.- El tipo de singularidad de f(z) en $z=\infty$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(\frac{1}{w})$ en w = 0.

Ejemplo.- La función $f(z)=z^3$ tiene como polo de tercer orden en $z=\infty$, ya que $f(\frac{1}{w})=\frac{1}{w^3}$ tiene un polo de tercer orden en w = 0.

Ejemplo.- Localizar y clasificar las singularidades

1) $f(z)=\frac{z}{(z^2+4)^2}$

Desarrollo

$$f(z)=\frac{z}{(z^2+4)^2}=\frac{z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

$\lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z)=\lim\limits_{z\to 2i}\frac{z}{(z+2i)^2}=\frac{1}{8i}\neq 0$, de donde z = 2i es un polo de segundo orden, simultáneamente

z =-2i e un polo de segundo orden.

Como se puede encontrar δ > 0 tal que ninguna singularidad distinta de z = 2i está dentro del círculo

‖z − 2i ‖ = δ entonces z = 2i es una singularidad aislada, simultáneamente para z = -2i es una singularidad aislada.

2) $f(z)=\frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$

Desarrollo

El punto z = 2 es un punto de ramificación y es una singularidad aislada, también $z^2+2z+2=0$ de donde se tiene $z=-1\pm 2i$ y se dice que $z=-1\pm 2i$ son polos de cuarto orden los cuales son singularidades aisladas.

3) $f(z)=\frac{sen\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

Luego si F(z) tiene un polo en $z=z_0$ y z_0 está en el interior de γ entonces

Desarrollo

Como $\lim_{z\to0} f(z)=\lim_{z\to0}\frac{sen\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1\neq0$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible.

8.2. RESIDUOS.-

Se conoce que el desarrollo de la serie de Laurent de una función analítica f(z) es una región anular $D=\{z\in C / R_1 <\|z-z_0\|< R_2\}$ está dado por:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n} \qquad ...(*)$$

Si la parte principal consiste de un número finito de términos es decir $b_n=0$, para n > m y $b_m\neq0$ entonces la serie () toma la forma:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+......+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}+0+0.....$$

en este caso F(z) tiene un polo de orden m en $z=z_0$ y el coeficiente b_1 denotado por $a_{-1}=b_1$ recibe el nombre de residuo de F en z_0.

Si F(z) tiene un polo simple $z=z_0$, entonces la serie es $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}$

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+......+a_n(z-z_0)^n+......+\frac{b_1}{z-z_0}$$

$(z-z_0)f(z)=a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+......+a_n(z-z_0)^{n+1}+...+b_1$ hora tomamos límite cuando $z\to z_0$

se tiene: $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=b_1=Re(f,z_0)$, b_1 recibe el nombre de F(z) en $z=z_0$.

$\oint_\gamma F(z)dz\neq0$

En este caso F(z) se puede expresar mediante la serie

$$F(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^\infty b_n(z-z_0)^n$$, convergente $\forall z\in C$ tal que

$0<\|z-z_0\|<R$ y $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(z-z_0)^{n-1}F(z)dz$

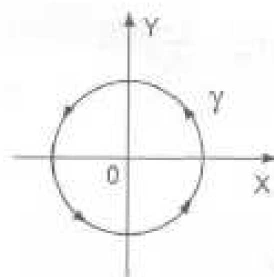
donde γ es una curva cerrada contenida en el anillo $0<\|z-z_0\|<R$

Si n = 1, $b_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z)dz$, de donde

$\oint_\gamma F(z)dz=2\pi b_1 i$ donde b_1 es el coeficiente de $\frac{1}{z-z_0}$ y b_1 es el residuo de F(z) que denotaremos por $Re(F,z_0)=b_1$, por lo tanto:

$$\oint_\gamma F(z)dz=2\pi ib_1=2\pi i Re(F,z_0)$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\oint_\gamma z^3e^{\frac1z}dz$, donde γ: $\|z\| = 1$



Desarrollo

$F(z)=z^3e^{\frac1z}$, no es analítica en z = 0

es decir z = 0 es un polo de F(z)

$$F(z)=z^3e^{\frac1z}=z^3\sum_{n=0}^\infty\frac{(\frac1z)^n}{n!}=z^3(1+\frac1z+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+...)$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+...$$

Luego $b_1=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}\Rightarrow b_1=Re(F,0)=\frac1{24}$

$$\oint_\gamma z^3e^{\frac1z}dz=2\pi iRe(F,0)=2\pi i(\frac1{24})=\frac{\pi}{12}i$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\oint_\gamma z^4 sen\frac1z dz$, donde γ: $\|z\| = 1$

Desarrollo

$f(z)=z^4sen\frac1z$, no es analítica en z = 0 que esta dentro de γ entonces z = 0 es un polo de f(z).

$$f(z)=z^4sen\frac1z=z^4\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(\frac1z)^{2n+1}}{(2n+1)!}=z^4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

$$=z^4(\frac1z-\frac1{3!z^3}+\frac1{5!z^5}-\frac1{7!z^7}+...)=(z^3-\frac{z}{3!}+\frac1{5!z}-\frac1{7!z^3}+...)$$

Luego $b_1=Re(f,0)=\frac1{5!}=\frac1{120}$

$$\therefore\oint_\gamma z^4sen\frac1z dz=2\pi iRe(f,0)=2\pi i(\frac1{120})=\frac{\pi}{60}i$$

8.3. TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si f(z) es una fracción analítica dentro y sobre una curva γ excepto en un número finito de puntos singulares $z_1,z_2,z_3,...,z_j,...,z_m$ pertenecientes al interior de γ, entonces:

$$\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^m Re(f,z_j)$$

Demostración

Sea f(z) una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada en γ, excepto en los puntos $z_1,z_2,...,z_m$ dentro de γ

También sea $Cr_j(z_j)$ la circunferencia de centro z_j y de radio r_j suficientemente pequeño para que $Cr_j(z_j)\subset\gamma$, $\forall$ j

$Cr_j(z_j)\cap Cr_k(z_k)=\phi$, $\forall k\neq j$ entonces

$$\oint_\gamma f(z)dz=\sum_{j=1}^m\oint_{Cr_j(z_j)}f(z)dz=\sum_{j=1}^m2\pi iRe(f,z_j)=2\pi i\sum_{j=1}^mRe(f,z_j)$$

$$\therefore\ \oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^mRe(f,z_j)$$

OBSERVACIÓN.- Si z_0 es un polo de orden m, hay una fórmula relativamente simple para calcular $Re(f,z_0)$.

8.4. TEOREMA.-

Si z_0 es un polo de orden m de la función f(z) entonces:

$$Re(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^mf(z)]$$

En el caso m = 1 y 0! = 1, por lo tanto si f tiene un polo simple de z_0, entonces se tiene: $Re(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

Demostración

Como z_0 es un polo de orden m de la función f(z), entonces f tiene un desarrollo en serie de Laurent en el anillo $0<\| z-z_0 \|<R$

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+...+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+... \quad ...(\alpha)$$

con $a_{-m}\neq 0$, puesto que f(z) tiene un polo de orden m en z_0

ahora lo que queremos evaluar es a_{-1} que es el residuo de f en z_0 es decir:

$$\text{Re}(f,z_0)=a_{-1} \quad ...(1)$$

a la ecuación (α) multiplicamos por $(z-z_0)^m$

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m}(z-z_0)^{m-1}+a_0(z-z_0)^m+...$$

como la serie de la derecha es una serie de Taylor alrededor de z_0, entonces $(z-z_0)^m f(z)$ es analítica en z_0 ahora derivamos esta ecuación m – 1 veces es decir:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=a_{-1}(m-1)(m-2)...(1)+a_0 m(m-1)(m-2)...(2)(z-z_0)+...$$

tomando límite cuando $z\to z_0$ se tiene:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=\lim_{z\to z_0}[a_{-1}(m-1)!+a_0 m!(z-z_0)+...]$$

$$=a_{-1}(m-1)!+0+0+...+0$$

de donde se obtiene: $$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \quad ...(2)$$

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$$\text{Re}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\oint_\gamma \frac{sen2z}{(z-i)^3}dz$, si γ es una curva simple suave a pedazos que encierra a i.

Desarrollo

La función sen 2z es analítica ∀ z y no se anula en i, además $\frac{sen2z}{(z-i)^3}$ tiene un polo de orden 3 en i.

$$\text{Re}(f,i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3\frac{sen2z}{(z-i)^3}]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(sen2z)$$

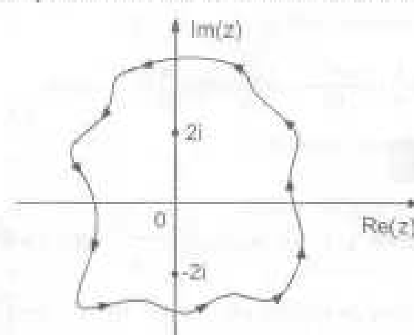
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(2\cos 2z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}(-4sen2z)=-2sen2i$$

Luego $$\oint_\gamma\frac{sen2z\,dz}{(z-i)^3}=2\pi i\,\text{Re}(f,i)=2\pi i(-2sen2i)=-4\pi i sen2i$$

$$sen2i=\frac{1}{2i}(e^{-2}-e^{2})=-\frac{1}{2i}(e^{2}-e^{-2})=i\frac{e^2-e^{-2}}{2}=isenh2$$

$$\therefore \oint_\gamma\frac{sen2z}{(z-i)^3}dz=4\pi\, senh2$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\oint_\gamma\frac{senz\,dz}{z^2(z^2+4)}$ si γ es cualquier curva simple suave a trazos que encierra a: 0, 2i, -2i como se muestra en la figura.



Desarrollo

La función $f(z)=\frac{sen\,z}{z^2(z^2+4)}$; tiene un polo en z = 0 de orden 2, sin embargo podemos escribir en la forma:
$$f(z)=\frac{sen\,z}{z^2(sen^2 z+4)}=\frac{\frac{sen\,z}{z}}{z(z^2+4)}=\frac{g(z)}{h(z)}$$

como $g(z)=\frac{sen\,z}{z}$ tiene una singularidad removible en z = 0 puesto que $\lim_{z\to 0}g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{sen\,z}{z}=1$ y h(z) tiene ceros simples en 0, 2i, -2i por lo tanto $\frac{g(z)}{h(z)}$ tiene polos simples en 0, 2i, -2i.

Ahora calculamos los residuos de f en estas singularidades

$$\text{Re}(f,0)=\lim_{z\to 0}z\frac{sen\,z}{z^2(z^2+4)}=\lim_{z\to 0}\frac{sen\,z}{z}\cdot\frac{1}{z^2+4}=(1)(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$$

$$\text{Re}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)sen\,z}{z^2(z+2i)(z-2i)}=\lim_{z\to 2i}\frac{sen\,z}{z^2(z^2+2i)}=\frac{sen\,2i}{-16i}=\frac{isen\,2i}{16}$$

$$\text{Re}(d,-2i)=\lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)sen\,z}{z^2(z+2i)(z-2i)}=\lim_{z\to -2i}\frac{sen\,z}{z^2(z-2i)}=-\frac{sen\,2i}{16i}=i\frac{sen\,2i}{16}$$

$$\oint_\gamma\frac{senz\,dz}{z^2(z^2+4)}=2\pi i[\text{Re}(f,0)+\text{Re}(f,2i)+\text{Re}(f,-2i)]$$

$$=2\pi i[\frac{1}{4}+\frac{isen\,2i}{16}+\frac{i\,sen\,2i}{16}]=\frac{\pi}{4}(2i-sen\,2i)$$

Demostración

Como f tiene un polo simple en z_0 y h tiene un cero simple en z_0, $h(z_0)=0$ y $h'(z_0)\neq 0$ entonces:

$$\text{Re}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}$$

$$\lim_{z\to z_0}g(z).\frac{z-z_0}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}g(z).\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=g(z_0).\frac{1}{h'(z_0)}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\therefore\ \text{Re}(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Ejemplo.- Evaluar $\oint_\gamma\frac{3z^2+1}{1+z^2}dz$, si γ es cualquier curva cerrado simple suave a pedazos que encierra a i, pero no a -i.

Desarrollo

$$\text{Re}(f,i)=\frac{g(i)}{h'(i)}=\frac{3i^2+1}{2i}=-\frac{2}{2i}=i$$

$$\oint_\gamma\frac{3z^2+1}{1+z^2}dz=2\pi i\,\text{Re}(f,i)=2\pi i(i)=-2\pi$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\oint_\gamma\frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}$, donde γ es:

a) γ: $\| z-2i \|=6$ b) γ es el cuadrado de vértices 1 + i, 2 + i, 2 + 2i, 1 + 2i.

Desarrollo

Y

.5. COROLARIO.-

Sea $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, donde g, h son analíticas en z_0, $g(z_0)\neq 0$ y h tiene un cero simple en z_0, entonces f tiene un polo simple en z_0 y $\text{Re}(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

a)



-2 polo de orden 3

2i polo simple

-2i polo simple

0 polo de orden 2

$$\text{Re}(f,-2)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}\Big[\frac{(z+2)^3(2z^2+5)}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}\Big[\frac{2z^2+5}{(z^2+4)z^2}\Big]=0.45$$

$$\text{Re}(f,0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\Big[\frac{z^2(2z^2+5)}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}\Big]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\Big[\frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)}\Big]=-0.23$$

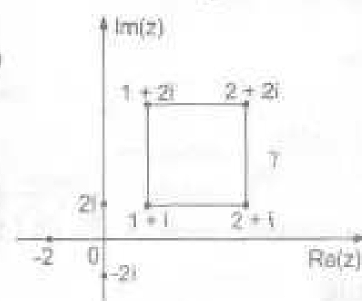
$$\text{Re}(f,2i)=\frac{P(2i)}{q'(2i)}=\frac{-3}{256-256i}=-0.0058-0.0058i$$

$$\text{Re}(f,-2i)=\frac{P(-2i)}{q'(2i)}=-0.0058+0.0058i$$

$$\oint_\gamma\frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}=2\pi i[\text{Re}(f,-2)+\text{Re}(f,0)+\text{Re}(f,2i)+\text{Re}(f,-2i)]$$

$$=2\pi i\,[0.45-0.23-0.0058-0.0058i-0.0058+0.0058i]=0.94168\,\pi i$$

b)



Los puntos -2, 0, 2i, -2i no están en el interior de γ.

Luego por la formula de la integral de Cauchy se tiene: $\oint_\gamma\frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}=0$

3.6. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1) Hallar las singularidades de la función $f(z)=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{[z^2+(3-i)z-3i]^2z^2}$

Desarrollo

$f(z)=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2z^2}$, es analítica excepto en $z=-3, i, 0$ puesto que sería ∞, por el denominador

$$f(z)=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+(3-i)z-3i)^2z^2}=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+3z-iz-3i)^2z^2}=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2z^2}$$

$$\lim_{z\to -3}f(z)=\lim_{z\to -3}\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2z^2}=\lim_{z\to -3}\frac{1}{(z-i)z}=\frac{1}{(-3-i)(-3)}$$

$$=\frac{1}{3(3+i)}=\frac{3-i}{3(9+1)}=\frac{1}{10}-\frac{i}{30}$$

existe por lo tanto f(z) tiene una singularidad en $z=-3$

$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{z}=\frac{1}{i}=-i$, es decir que f(z) tiene un polo simple en $z=i$

$$\lim_{z\to 0}z\,f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-i}=i$$

por lo tanto f(z) tiene un polo simple en $z=0$

2) Hallar los puntos singulares de la función $f(z)=\frac{\exp(z)}{(z-1)^2}$, analice la naturaleza de los mismos.

Desarrollo

$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z=1$ es una singularidad aislada

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{(z-1)+1}}{(z-1)^2}=e.\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2}=\frac{e}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!},\ \forall z\in C-\{1\}$$

$$f(z)=e.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-2}}{n!}=e\Big[\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{n-2}\Big]$$

$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-2}$, de donde $z=1$ es un polo de orden 2.

3) Sea f una función analítica en punto z_0, probar que:

a) Si $f(z_0)=0$, entonces z_0 es un punto singular evitable de la función $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$

b) Si $f(z_0)\neq 0$, el punto z_0 es un polo simple de la función g de la parte a) con residuo $f(z_0)$

Desarrollo

a) Del desarrollo en serie de Taylor para la función f(z).

$$f(z)=\underbrace{f(z_0)}_{0}+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots$$

$$f(z)=f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{2!}+\ldots$$

$$g(z)=\frac{f(z_0)}{z-z_0}+f'(z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)+\ldots$$

entonces $z=z_0$ es un polo de orden 1 y además

$$\text{Re}(g,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}f(z_0)=f(z_0)$$

$\therefore\ \text{Re}(g,z_0)=f(z_0)$

4) Encontrar los ceros y los polos de $f(z)=\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$ y determinar el residuo en los polos.

Desarrollo

Los ceros de la función f(z) se obtiene cuando $f(z)=0$ es decir:

$f(z)=\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}=0 \Leftrightarrow z^2+4=0$ entonces $z^2=-4$ de donde $z=2i$, $z=-2i$

Por lo tanto f(z) tiene dos ceros que son $z=2i$, $z=-2i$ los polos se obtienen de $z^3+2z^2+2z=0$, de donde $z(z^2+2z+2)=0 \Rightarrow z=0 \vee z^2+2z+2=0$

Luego $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{2!}+...}{z-z_0}$

$$=f'(z_0)+\frac{f''(z_0)(z-z_0)}{2!}+...$$

por lo tanto $z=z_0$ es un punto singular evitable de $g(z)$

b) Como $f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)(z-z_0)}{1!}+\frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{2!}+...$

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)}=\frac{f(z_0)+\frac{f'(z_0)(z-z_0)}{1!}+\frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{2!}+...}{z-z_0}$$

$z=0 \vee (z+1)^2=-1 \Rightarrow z=0 \vee z=-1+i,\ z=-1-i$

por lo tanto f(z) tiene tres polos simples $z=0,\ z=-1+i,\ z=-1-i$

ahora calculamos los residuos en cada polo

$$Re(f,0)=\lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+4}{z^2+2z+2}=2$$

$$Re(f,-1+i)=\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)f(z)=\lim_{z\to -1+i}\frac{(z+1-i)(z^2+4)}{z(z+1-i)(z+1+i)}$$

$$=\lim_{z\to -1+i}\frac{z^2+4}{z(z+1+i)}=\frac{(-1+i)^2+4}{(-1+i)(-1+i+1+i)}$$

$$=\frac{-2i+4}{(-1+i)2i}=\frac{-i+2}{(-1+i)i}=\frac{-i+2}{-1-i}=\frac{i-2}{1+i}=\frac{(i-2)(1-i)}{2}=\frac{-1+3i}{2}$$

$$Re(f,-1-i)=\lim_{z\to -1-i}(z+1+i)f(z)=\lim_{z\to -1-i}\frac{(z+1+i)(z^2+4)}{z(z+1+i)(z+1-i)}$$

$$=\lim_{z\to -1-i}\frac{z^2+4}{z(z+1-i)}=\frac{(-1-i)^2+4}{(-1-i)(-1-i+1-i)}$$

$$=\frac{2i+4}{(1+i)2i}=\frac{i+2}{-1+i}=\frac{(i+2)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-1-3i}{-2}=\frac{1+3i}{2}$$

6 Demostrar en cada caso que los puntos singulares son polos. Determinar el orden de cada polo y el residuo correspondiente.

a) $f(z)=\frac{z^2+2}{z-1}$ b) $f(z)=(\frac{z}{2z+1})^3$ c) $f(z)=tgh\,z$ d) $f(z)=\frac{z}{\cos z}$

Desarrollo

a) $f(z)=\frac{z^2+2}{z-1}$, tiene un polo simple de orden 1 en $z=1$ puesto que

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}z^2+2=3\neq 0$$

$$Re(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^2+2)}{z-1}=\lim_{z\to 1}(z^2+2)=3$$

$\therefore Re(f,1)=3$

b) $f(z)=(\frac{z}{2z+1})^3=\frac{z^3}{(2z+1)^3}$, tiene un polo de orden 3 en $z=-\frac{1}{2}$ puesto que

$$\lim_{z\to -\frac{1}{2}}(2z+1)^3 f(z)=\lim_{z\to -\frac{1}{2}}z^3=-\frac{1}{8}\neq 0$$

calculando el residuo del polo de orden 3 en $z=-\frac{1}{2}$

$$Re(f,-\frac{1}{2})=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(2z-1)^3 f(z)]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dz^2}[(2z-1)^3\frac{z^3}{(2z-1)^3}]=\frac{1}{2}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{d^2z^3}{dz^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{d^2z^3}{dz^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{d(3z^2)}{dz}=\frac{1}{2}\lim_{z\to -\frac{1}{2}}6z=\frac{1}{2}(6(-\frac{1}{2}))=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$\therefore Re(f,-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$

c) $f(z)=tgh z=\frac{senh\,z}{\cosh z}=\frac{P(z)}{q(z)}$; como p(z) y q(z) son funciones enteras, entonces las singularidades del cociente ocurre en los casos de q(z), es decir en los puntos $\cos z=0 \Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

como $\cosh z=\cos iz \Rightarrow iz=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=-(2k+1)\frac{\pi i}{2}$

entonces $q(z)=\cosh z \Rightarrow q'(z)=senh z=-isen iz=0 \Rightarrow iz=k\pi \quad z=-k\pi i$

claramente $q'(-(2k+1)\frac{\pi}{2}i)\neq 0 \wedge p(-(2k+1)\frac{\pi}{2}i)\neq 0$

entonces la función es analítica en $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}i$ entonces son polos simples

Luego $Re(f,-(2k+1)\frac{\pi}{2}i))=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}=\frac{p(-(2k+1)\frac{\pi}{2}i)}{q(-(2k+1)\frac{\pi}{2}i)}=\frac{senh(-(2k+1)\frac{\pi}{2}i)}{senh(-(2k+1)\frac{\pi}{2}i)}=1$

d) $f(z)=\frac{z}{\cos z}=\frac{p(z)}{q(z)}$, como p(z) y q(z) son funciones enteras, entonces las singularidades del cociente ocurre en los ceros de q(z) es decir en los puntos $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$p((2k+1)\frac{\pi}{2})=(2k+1)\frac{\pi}{2}\neq 0$ y $q'(z)=-sen\,z$ donde

$q'((2k+1)\frac{\pi}{2})=-(-1)^k\neq 0$ entonces cada punto singular es un polo simple

Luego $Re(f,(2k+1)\frac{\pi}{2})=\frac{p((2k+1)\frac{\pi}{2})}{q'((2k+1)\frac{\pi}{2})}=\frac{(2k+1)\frac{\pi}{2}}{-(-1)^k}$

$$f(z)=\frac{senh\,z}{z^4(1-z^2)}=(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...)(\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+1+z^2+...)$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!z}+\frac{z}{5!}+...+\frac{1}{z}+\frac{z}{3!}+...+\frac{1}{z}+\frac{z}{3!}+...$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{z}+z(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!})+\frac{z^3}{3!}+...=\frac{1}{z^3}+\frac{7}{6z}+z(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!})+\frac{z^3}{3!}+...$$

$\therefore Re(f,0)=\frac{7}{6}$

7 Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{z^6+4z^4-2z^2+1}{(z-2i)^6}dz$, donde:

$\gamma=\{z\in\mathbb{C}\,/\,-4\leq Re(z)\leq 4 \wedge -4\leq Im(z)\leq 4\}$

Desarrollo

Hallar el residuo de las siguientes funciones:

a) $f(z)=\frac{z-sen\,z}{z}$ b) $f(z)=\frac{senh\,z}{z^4(1-z^2)}$

Desarrollo

a) $f(z)=\frac{z-sen\,z}{z}$ tiene un polo simple en $z=0$

$$Re(f,0)=\lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0} z\left(\frac{z-sen\,z}{z}\right)=\lim_{z\to 0}(z-sen\,z)=0$$

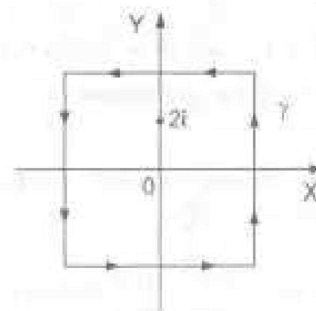
$\therefore\ Re(f,0)=0$

b) Se conoce que $\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\ldots$

$$\frac{1}{z^4(1-z^2)}=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+1+z^2+\ldots$$

$$senh\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots$$

Desarrollo



Como γ es el borde del cuadrado $x=\pm 4,\ y=\pm 4$

$z_0=2i$ es un polo de orden 6 que está en el interior de γ

$$\oint_\gamma \frac{z^6+4z^4-2z^2+1}{(z-2i)^6}dz=2\pi i\,Re\,f(z,2i)$$

donde el residuo de f(z) es

$$Re(f,2i)=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 2i}\frac{d^5}{dz^5}\left[(z-2i)^6\cdot\frac{z^6+4z^4-2z^2+1}{(z-2i)^6}\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 2i}\frac{d^5}{dz^5}(z^6+4z^4-2z^2+1)=\frac{1}{120}\lim_{z\to 2i}\frac{d^4}{dz^4}(6z^5+16z^3-4z)$$

$$=\frac{1}{120}\lim_{z\to 2i}\frac{d^3}{dz^3}(30z^4+48z^2-4)=\frac{1}{120}\lim_{z\to 2i}\frac{d^2}{dz^2}(120z^3+96z)$$

$$=\frac{1}{120}\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}(360z^2+96)=\frac{1}{120}\lim_{z\to 2i}720.z=\frac{720}{120}\lim_{z\to 2i}z=6(2i)=12i$$

$$\oint_\gamma \frac{z^6-4z^4-2z^2+1}{(z-2i)^6}dz=2\pi i(Re(f,2i))=2\pi i(12i)=-24\pi$$

$$\therefore\ \oint_\gamma \frac{z^6-4z^4-2z^2+1}{(z-2i)^6}dz=-24\pi$$

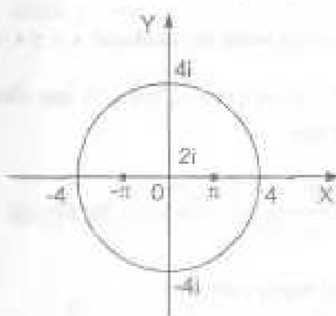
Calcular la integral $\oint_\gamma ctg\,z\,dz$, donde $\gamma:\ |z|=4$

Desarrollo

$f(z)=ctg\,z=\frac{\cos z}{sen\,z}$, los polos de f(z) se encuentra en

$$sen\,z=0\ \Rightarrow\ \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0\ \Rightarrow\ e^{iz}-e^{-iz}=0\ \Rightarrow\ e^{2iz}=1$$

de donde $z=k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$



Luego f(z) tiene 3 polos simples 0, π, -π que están en el interior de γ entonces:

$$\oint_\gamma ctg\,z\,dz=2\pi i[Re(f,0)+Re(f,\pi)+Re(f,-\pi)]$$

como $f(z)=ctg\,z=\frac{\cos z}{sen\,z}=\frac{p(z)}{q(z)}$ donde $q'(z)=\cos z$

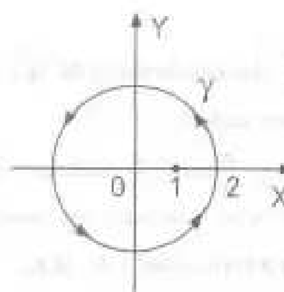
$$Re(f,0)=\frac{p(0)}{q'(0)}=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1$$

$$Re(f,\pi)=\frac{p(\pi)}{q'(\pi)}=\frac{\cos\pi}{\cos\pi}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$Re(f,-\pi)=\frac{p(-\pi)}{q'(-\pi)}=\frac{\cos(-\pi)}{\cos(-\pi)}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\oint_\gamma ctg\,z\,dz=2\pi i[1+1+1]=6\pi i$$

(9) Evaluar la integral $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}$, donde $\gamma:\ |z|=2$



Desarrollo

Se tiene dos polos uno simple $z=0$ y otro de orden 2 que es $z=1$, y que están en el interior de γ entonces por el teorema del residuo.

$$\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}=2\pi i[Re(f,0)+Re(f,1)] \quad \ldots (1)$$

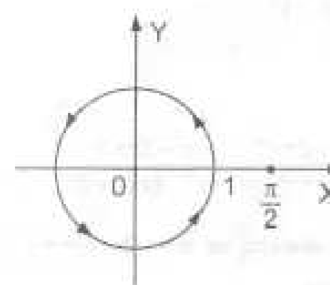
$$Re(f,0)=\lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{ze^z}{(z-1)^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1$$

$$Re(f,1)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2 z}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z-e^z}{z^2}=e-e=0$$

$$\therefore\ \oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}=2\pi i[1+0]=2\pi i$$

(10) Evaluar la integral $\oint_\Gamma tg\,z\,dz$, donde $\Gamma:\ |z|=1$

Desarrollo



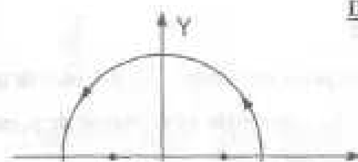
$tg\,z=\frac{sen\,z}{\cos z}$, las singularidades de tg z son los ceros de cos z es decir:

$\cos z=0\ \Rightarrow\ z=\frac{\pi}{2}$ que no esta en el interior de Γ entonces tg z es analítica en $|z|<1$, luego por el teorema de Cauchy para integrales se tiene:

$$\oint_\Gamma tg\,z\,dz=0$$

(11) Evaluar la integral $\oint_\Gamma tg\,z\,dz$, donde $\Gamma:\ |z|=2$

Desarrollo



$tg\,z=\frac{sen\,z}{\cos z}$, las singularidades de tg z son los ceros de cos z, es decir:

$$\oint_\gamma \frac{z^2-2z+2}{z^4+5z^2+4}dz=2\pi i[Re(f,i)+Re(f,-i)+Re(f,2i)+Re(f,-2i)]$$

$$Re(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)\left[\frac{z^2-2z+2}{(z^2+4)(z+i)(z-i)}\right]=\lim_{z\to i}\frac{z^2-2z+2}{(z^2+4)(z+i)}$$

-2 $-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$ 2 X

$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}$, $z = -\frac{\pi}{2}$ osea que $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ son ceros de orden 1 de cos z en consecuencia $\pm\frac{\pi}{2}$ son los polos de orden 1 de tg z.

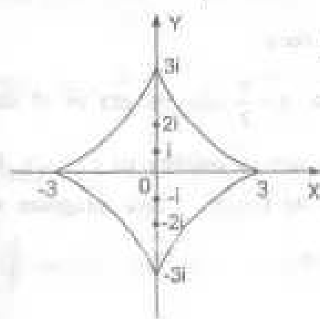
$$\oint_\Gamma tg\,z\,dz = 2\pi i[Re(f,\frac{\pi}{2}) + Re(f,-\frac{\pi}{2})]$$

$$Re(f,\frac{\pi}{2}) = \frac{sen\frac{\pi}{2}}{-sen\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$Re(f,-\frac{\pi}{2}) = \frac{sen(-\frac{\pi}{2})}{-sen(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\therefore \quad \oint_\Gamma tg\,z\,dz = 2\pi i[-1-1] = -4\pi i$$

(12) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{z^2-2z+2}{z^4+5z^2+4}dz$, $\gamma: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$



Desarrollo

$$f(z) = \frac{z^2-2z+2}{z^4+5z^2+4} = \frac{z^2-2z+2}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

deja de ser analítica en $z = \pm 2i$, $z = \pm i$ y son polos simples

(−1+4)(2i)   6i   3   6

$$Re(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)[\frac{z^2-2z+2}{(z^2+4)(z+i)(z-i)}] = \lim_{z\to -i}\frac{z^2-2z+2}{(z^2+4)(z-i)}$$

$$= \frac{-1-2i+2}{(-1+4)(-2i)} = \frac{1-2i}{-6i} = \frac{1}{3}+\frac{i}{6}$$

$$Re(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)[\frac{z^2-2z+2}{(z-2i)(z+2i)(z^2+1)}] = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2z+2}{(z+2i)(z^2+1)}$$

$$= \frac{-4-4i+2}{4i(-4+1)} = \frac{-2-4i}{-12i} = \frac{1}{3}-\frac{i}{6}$$

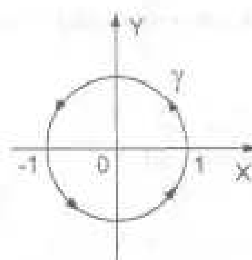
$$Re(f,-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{z^2-2z+2}{(z^2+1)(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to -2i}\frac{z^2-2z+2}{(z^2+1)(z-2i)}$$

$$= \frac{-4+4i+2}{(-4+1)(-4i)} = \frac{-2+4i}{12i} = \frac{1}{3}+\frac{i}{6}$$

$$\oint_\gamma \frac{z^2-2z+2}{z^4+5z^2+4}dz = 2\pi i[\frac{1}{3}-\frac{i}{6}+\frac{1}{3}+\frac{i}{6}+\frac{1}{3}-\frac{i}{6}+\frac{1}{3}+\frac{i}{6}] = 2\pi i(\frac{2}{3}) = \frac{4\pi}{3}i$$

(13) Calcular la integral $\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}sen(\frac{1}{z})dz$, donde γ: ||z|| = 1.

Desarrollo



Tenemos un polo simple en z = 0 que está en el interior de γ.

$$e^{\frac{1}{z}}sen\frac{1}{z} = (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z})^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!})$$

$$= (1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+...)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-...)$$

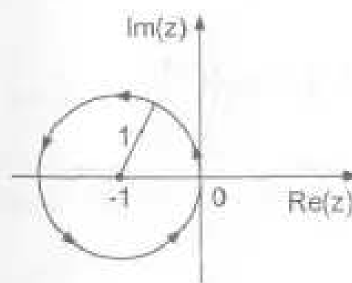
$$= \frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-...+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^4}+...+\frac{1}{2!z^3}-\frac{1}{2!3!z^5}+...$$

de donde $Re(e^{\frac{1}{z}}sen\frac{1}{z},0) = 1$

$$\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}sen(\frac{1}{z})dz = 2\pi i\,Re(e^{\frac{1}{z}}sen\frac{1}{z},0) = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

(14) Calcular $\oint_\gamma \frac{ze^{az}dz}{(z+1)^3}$, donde γ = {z ∈ C / ||z+1|| = 1}

Desarrollo



$f(z) = \frac{ze^{az}}{(z+1)^3}$, tiene un polo en z = -1 de orden 3

$$Re(f,-1) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}[\frac{(z+1)^3ze^{az}}{(z+1)^3}]$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}(ze^{az}) = \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}(az+1)e^{az} \cdot (\frac{a}{2}+1)e^{-\frac{a}{2}}$$

$$\oint_\gamma \frac{ze^{az}dz}{(z+1)^3} = 2\pi i\,Re(f,-1) = 2\pi i(\frac{a}{2}+1)e^{-\frac{a}{2}}$$

$$\therefore \quad \oint_\gamma \frac{ze^{az}dz}{(z+1)^3} = \pi i(a+2)e^{-\frac{a}{2}}$$

(15) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^{4z}dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$, si γ = {z ∈ C / || z || = 2}

Desarrollo

La función $f(z) = \frac{e^{4z}}{(z^2+1)(z^2+9)}$, tiene polos simples en $z = \pm i$; $z = \pm 3i$ de los cuáles solamente $z = \pm i$ están en el interior de γ, entonces:

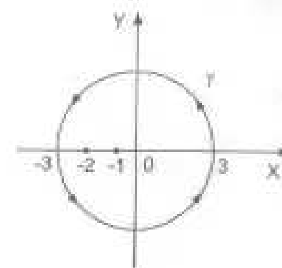
$$\oint_\gamma \frac{e^{4z}dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i[Re(f,i)+Re(f,-i)], \text{ donde}$$

$$Re(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{4z}}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = \lim_{z\to i}\frac{e^{4z}}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{e^{4i}}{2i(-1+9)} = \frac{e^{4i}}{16i}$$

$$Re(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{4z}}{(z+i)(z-i)(z^2+9)} = \lim_{z\to -i}\frac{e^{4z}}{(z-i)(z^2+9)} = \frac{e^{-4i}}{-2i(-1+9)} = -\frac{e^{-4i}}{16i}$$

$$\oint_\gamma \frac{e^{4z}dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i[\frac{e^{4i}}{16i}-\frac{e^{-4i}}{16i}] = \frac{\pi}{8}(e^{4i}-e^{-4i}) = \frac{\pi i}{4}(\frac{e^{4i}-e^{-4i}}{2i}) = \frac{\pi i}{4}sen4$$

(16) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{4z-1}{z^2+3z+2}dz$, donde γ: || z || = 3



Desarrollo

La función $f(z) = \frac{4z-1}{z^2+3z+2} = \frac{4z-1}{(z+2)(z+1)}$ tiene polos simples en z = -2, z = -1 y que están en el interior de γ.

$\oint \quad 4z-1$

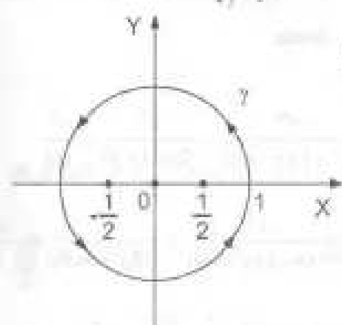
$$\oint_\gamma \frac{4z-1}{z^2+3z+2}dz = 2\pi i[\text{Re}(f,-2)+\text{Re}(f,-1)]\text{, donde}$$

$$\text{Re}(f,-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{(4z-1)}{(z+2)(z+1)} = \lim_{z\to -2}\frac{4z-1}{z+1} = 9$$

$$\text{Re}(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{(4z-1)}{(z+2)(z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{4z-1}{z+2} = -5$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{4z-1}{z^2+3z+2}dz = 2\pi i[9-5] = 8\pi i$$

(17) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{tg\pi z}{z^3}dz$, donde γ: $\|z\| = 1$



Desarrollo

La función $f(z) = \frac{tg\pi z}{z^3} = \frac{sen\pi z}{z^3\cos\pi z}$ es analítica $\forall z \in C$, tal que $z^3\cos\pi z = 0 \Rightarrow$ $z = 0 \vee \cos\pi z = 0$ de donde $z = \frac{1}{2}+k$, $k \in z$ donde $z = 0$ es un polo de orden 3

Para $k = 0$, $z = \frac{1}{2}$ es un polo simple que está en el interior

$k = 1$, $z = -\frac{1}{2}$ es un polo simple que está en el interior

NOTA.- $\cos\pi z = 0 \Rightarrow \frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{2} = 0$ de donde

$e^{2i\pi z}+1 = 0 \Rightarrow e^{2i\pi z} = -1$ de donde $2\pi iz = \underbrace{\ln\|-1\|}_{0}+i(\pi+2k\pi)$

$2\pi z = \pi + 2k\pi$ entonces $z = \frac{1}{2}+k$, $\forall k \in z$

$$\oint_\gamma \frac{tg\pi z}{z^3}dz = 2\pi i[\text{Re}(f,0)+\text{Re}(f,\tfrac{1}{2})+\text{Re}(f,-\tfrac{1}{2})]\text{, de donde}$$

$$\text{Re}(f,0) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3.\frac{tg\pi z}{z^3}] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(tg\pi z)$$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[\pi\sec^2\pi z] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}2\pi tg\pi z.\sec^2\pi z = \pi\lim_{z\to 0}tg\pi z.\sec^2\pi z = 0$$

$$\text{Re}(f,\tfrac{1}{2}) = \frac{p(\frac{1}{2})}{q'(\frac{1}{2})} \text{ donde } \begin{cases} p(z) = sen\pi z \Rightarrow p(\frac{1}{2}) = 1 \\ q(z) = z^3\cos\pi z \end{cases}$$

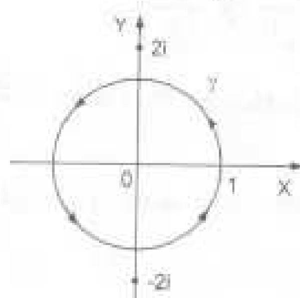
$$q'(z) = 3z^2\cos\pi z - \pi z^3 sen\pi z \Rightarrow q'(\tfrac{1}{2}) = -\frac{\pi}{8}$$

$$\text{Re}(f,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{-\frac{\pi}{8}} = -\frac{8}{\pi}$$

$$\text{Re}(f,-\tfrac{1}{2}) = \frac{p(-\frac{1}{2})}{q'(-\frac{1}{2})} = \frac{-1}{\frac{\pi}{8}} = -\frac{8}{\pi}$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{tg\pi z}{z^3}dz = 2\pi i[0-\frac{8}{\pi}-\frac{8}{\pi}] = -32i$$

(18) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2+4)}dz$, donde γ: $\|z\| = 1$



Desarrollo

$f(z) = \frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2+4)}$, tiene polos de orden 3 en $z = 0$ y polos simples en $z = \pm 2i$ pero $z = \pm 2i$ no están en el interior de γ, entonces:

$$\oint_\gamma \frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2+4)}dz = 2\pi i\,\text{Re}(f,0)\text{, donde}$$

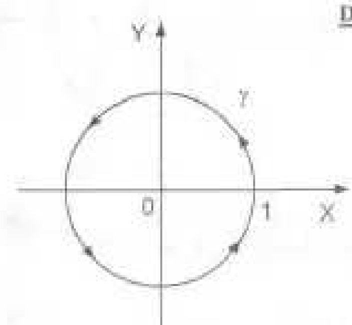
$$\text{Re}(f,0) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3(\frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2+4)})]$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^2+4}) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[8z-3+\frac{48-12z^2}{(z^2+4)^2}]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}[8+\frac{48z^2-24z^3-288z}{(z^2+4)^3}] = \frac{1}{2}[8+0] = 4$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2+4)}dz = 2\pi i(4) = 8\pi i$$

(19) Calcular la integral $\oint_\gamma z^6 sen\frac{1}{z}dz$ donde γ: $\|z\| = 1$



Desarrollo

$$f(z) = z^6 sen\frac{1}{z} = z^6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= z^6(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+...)$$

$$= z^5-\frac{z^3}{3!}+\frac{z}{5!}-\frac{1}{7!z}+...$$

donde $\text{Re}(f,0) = -\frac{1}{7!}$ entonces: $\therefore \oint_\gamma z^6 sen\frac{1}{z}dz = 2\pi i\,\text{Re}(f,0) = -\frac{2\pi i}{7!}$

(20) Calcular la integral $\oint_\gamma z^3 e^{\frac{1}{z}}dz$, alrededor del circulo γ con ecuación $\|z-1\| = 4$.

Sea $f(z) = z^3e^{\frac{1}{z}}$ entonces $z = 0$ es una singularidad esencial simple de $f(z)$ y está en el interior de γ.

Como $e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$, para $w = \frac{1}{z}$ se tiene:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.\frac{1}{z^n} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+...$$

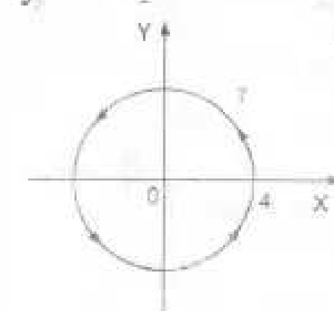
$$f(z) = z^3e^{\frac{1}{z}} = z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24z}+\frac{1}{120z^2}+...$$

entones $\text{Re}(f,0)$ = coeficiente de $\frac{1}{z} = \frac{1}{24}$

$$\therefore \oint_\gamma z^3e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\,\text{Re}(f,0) = 2\pi i(\frac{1}{24}) = \frac{\pi i}{12}$$

$$\therefore \oint_\gamma z^3e^{\frac{1}{z}}dz = \frac{\pi i}{12}$$

(21) Sea γ el circulo con ecuación $\|z\| = 4$, determinar el valor de la integral si existe $\oint_\gamma z^2 \text{cosec}(\frac{1}{z})dz$



Desarrollo

$z = 0$ es una singularidad esencial simple y está en el interior de γ.

$$\text{cosec}\,x = \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\frac{127}{604800}x^7+\text{.....}\quad x^2<\pi^2$$

para $x=\frac{1}{z}=z^{-1}$, se tiene: $\operatorname{cosec}\frac{1}{z}=z+\frac{z^{-1}}{6}+\frac{7}{360}z^{-3}+\frac{31}{15120}z^{-5}+\frac{127}{604800}z^{-7}+...$

$$f(z)=z^2\operatorname{cosec}\frac{1}{z}=z^3+\frac{z}{6}+\frac{7}{360}z^{-1}+\frac{31}{15120}z^{-3}+\frac{127}{604800}z^{-5}+...$$

$\operatorname{Re}(f,0)=$ coeficiente de $z^{-1}=\frac{7}{360}$

$$\oint_\gamma z^2\operatorname{cosec}\frac{1}{z}\,dz=2\pi i\operatorname{Re}(f,0)=2\pi i(\frac{7}{360})=\frac{7\pi i}{180}$$

(22) Calcular la integral $\oint_\gamma z^8e^{\frac{1}{z}}dz$, donde $\gamma=\{z\in C/\|z\|=\frac{1}{2}\}$

Desarrollo

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+...+\frac{1}{n!z^n}+...$$

$$z^8e^{\frac{1}{z}}=z^8+z^7+\frac{z^6}{2!}+\frac{z^5}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^3}{5!}+\frac{z^2}{6!}+\frac{z}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!z}+...$$

Luego $\operatorname{Re}(f,0)=$ coeficiente de $\frac{1}{z}=\frac{1}{9!}$, entonces:

$$\oint_\gamma z^8e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\operatorname{Re}(f,0)=2\pi i(\frac{1}{9!})=\frac{\pi i}{177840}$$

(23) Calcular $\oint_\gamma(1+z+z^2+z^3)e^{\frac{1}{z-5}}dz$, donde $\gamma=\{z\in C/\|z\|=6\}$

Desarrollo

$$e^{\frac{1}{z-5}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-5)^n}=1+\frac{1}{z-5}+\frac{1}{2!(z-5)^2}+\frac{1}{3!(z-5)^3}+\frac{1}{4!(z-5)^4}+...$$

hacemos $z-5=u \Rightarrow \begin{cases} z=u+5 \\ z^2=u^2+10u+25 \\ z^3=u^3+15u^2+75u+125\end{cases}$

$$e^{\frac{1}{z-5}}=1+\frac{1}{u}+\frac{1}{2!u^2}+\frac{1}{3!u^3}+\frac{1}{4!u^4}+...+\frac{1}{n!u^n}+...$$

si $w=(1+z+z^2+z^3)e^{\frac{1}{z-5}}$, de donde

$$w=[1+(u+5)+(u^2+10u+25)+(u^3+15u^2+75u+125)][1+\frac{1}{u}+\frac{1}{2!u^2}+\frac{1}{3!u^3}+...]$$

$$=[1+\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+...+1+\frac{1}{2u}+\frac{1}{6u^2}+...+5+\frac{5}{u}+\frac{5}{2u^2}+...+$$

$$+u^2+u+\frac{1}{2}+\frac{1}{6u}+...+\frac{1}{24u^2}+10u+...+10+\frac{10}{2u}+...+$$

$$+25+\frac{25}{u}+...+u^3+u^2+\frac{u}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24u}+...+15u^2+15u+$$

$$+\frac{15}{2}+\frac{15}{6u}+...+75u+75+\frac{75}{2u}+...+125+\frac{125}{u}]$$

$$\oint_\gamma(1+z+z^2+z^3)e^{\frac{1}{z-5}}dz=2\pi i[1+\frac{1}{2}+5+\frac{1}{6}+5+25+\frac{1}{24}+\frac{5}{2}+\frac{75}{2}+125]$$

$$=2\pi i[\frac{1617}{8}]=\frac{1617\pi i}{4}$$

(24) Calcular $\oint_\gamma(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})dz$, donde $\gamma=\{z\in C/\|z\|=3\}$

Desarrollo

$$(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})=e^{\frac{1}{z}}+ze^{\frac{1}{z}}+z^2e^{\frac{1}{z}}+ze^{\frac{1}{z-1}}+z^2e^{\frac{1}{z-1}}+$$

$$+e^{\frac{1}{z-2}}+ze^{\frac{1}{z-2}}+z^2e^{\frac{1}{z-2}}$$

$$\oint_\gamma(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})dz=\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}dz+\oint_\gamma ze^{\frac{1}{z}}dz+\oint_\gamma z^2e^{\frac{1}{z}}dz$$

$$+\oint_\gamma e^{\frac{1}{z-1}}dz+\oint_\gamma ze^{\frac{1}{z-1}}dz+\oint_\gamma z^2e^{\frac{1}{z-1}}dz+$$

$$+\oint_\gamma e^{\frac{1}{z-2}}dz+\oint_\gamma ze^{\frac{1}{z-2}}dz+\oint_\gamma z^2e^{\frac{1}{z-2}}dz \quad ...(1)$$

$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+...+\frac{1}{n!z^n}+... \Rightarrow \operatorname{Re}(f,0)=1$

$$\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\operatorname{Re}(f,0)=2\pi i \quad ...(2)$$

$ze^{\frac{1}{z}}=z+1+\frac{1}{2!z}+...+\frac{1}{n!z^{n-1}}+...$ entonces $\operatorname{Re}(f,0)=\frac{1}{2}$

$$\oint_\gamma ze^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\operatorname{Re}(f,0)=2\pi i(\frac{1}{2})=\pi i \quad ...(3)$$

$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+...+\frac{1}{n!z^{n-2}}+...$, entonces $\operatorname{Re}(f,0)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$

$$\oint_\gamma z^2e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i(\frac{1}{6})=\frac{\pi}{3}i \quad ...(4)$$

hacemos $z-1=u \Rightarrow z=u+1$

$$ze^{\frac{1}{z-1}}=1+u+\frac{1+u}{u}+\frac{u+1}{2!u^2}+...+\frac{u+1}{n!u^n}+...=1+u+1+\frac{1}{u}+\frac{1}{2!u}+\frac{1}{2!u^2}+...+\frac{u+1}{n!u^n}+...$$

$$\oint_\gamma ze^{\frac{1}{z-1}}dz=2\pi i[1+\frac{1}{2}]=3\pi i \quad ...(6)$$

$$z^2e^{\frac{1}{z-1}}=z^2+\frac{z^2}{z-1}+\frac{z^2}{2!(z-1)^2}+...+\frac{z^2}{n!(z-1)^n}+...$$

hacemos $z-1=u \Rightarrow z=1+u$

$$z^2e^{\frac{1}{z-1}}=(u+1)^2+\frac{(u+1)^2}{u}+\frac{(u+1)^2}{2!u^2}+...+\frac{(u+1)^2}{n!u^n}+...$$

$$=u^2+2u+1+u+2+\frac{1}{u}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{u}+\frac{1}{2!u^2}+...+\frac{(u+1)^2}{n!u^n}+...$$

$$\oint_\gamma z^2e^{\frac{1}{z-1}}dz=2\pi i[1+\frac{1}{6}+1]=2\pi i[\frac{13}{6}]=\frac{13\pi i}{3} \quad ...(7)$$

$e^{\frac{1}{z-2}}=1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+...+\frac{1}{n!(z-2)^n}+...$, entonces $\operatorname{Re}(f,2)=1$

$$\oint_\gamma e^{\frac{1}{z-2}}dz=2\pi i\operatorname{Re}(f,2)=2\pi i \quad ...(8)$$

$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + ... + \frac{1}{n!(z-1)^n} + ...$ entonces: $Re(f,1) = 1$

$$\oint_\gamma e^{\frac{1}{z-1}} dz = 2\pi i Re(f,1) = 2\pi i(1) = 2\pi i \qquad ...(5)$$

$$ze^{\frac{1}{z-1}} = z + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2!(z-1)^2} + ... + \frac{z}{n!(z-1)^n} + ...$$

$$ze^{\frac{1}{z-2}} = z + \frac{z}{z-2} + \frac{z}{2!(z-2)^2} + ... + \frac{z}{n!(z-2)^n} + ...$$

hacemos $u = z-2$, entonces $z = u+2$

$$ze^{\frac{1}{z-2}} = u + 2 + \frac{u+2}{2!u^2} + ... + \frac{u+1}{n!u^n} + ...$$

$$= u + 2 + 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{2!u} + \frac{2}{2!u^2} + ... + \frac{u+1}{n!u^n} + ... \Rightarrow Re(f,2) = 2 + \frac{1}{2!}$$

$$\oint_\gamma ze^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i Re(f,2) = 2\pi i(2 + \frac{1}{2!}) = 5\pi i \qquad ...(9)$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-2}} = z^2 + \frac{z^2}{2!(z-2)^2} + \frac{z^2}{3!(z-2)^3} + ... + \frac{z^2}{n!(z-2)^n} + ...$$

hacemos $u = z-2 \Rightarrow z = u+2$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-2}} = (u+2)^2 + \frac{(u+2)^2}{u} + \frac{(u+2)^2}{2!u^2} + \frac{(u+2)^2}{3!u^3} + ... + \frac{(u+2)^2}{n!u^n} + ...$$

$$= (u+2)^2 + u + 4 + \frac{4}{u} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{u} + \frac{4}{2u^2} + \frac{1}{3!u} + \frac{4}{3!u^2} + ... + \frac{(u+2)^2}{n!u^n} + ...$$

$$\oint_\gamma z^2 e^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i[4 + 2 + \frac{1}{6}] = 2\pi i(\frac{37}{6}) = \frac{37\pi i}{3} \qquad ...(10)$$

ahora reemplazamos (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) y (10) en (1)

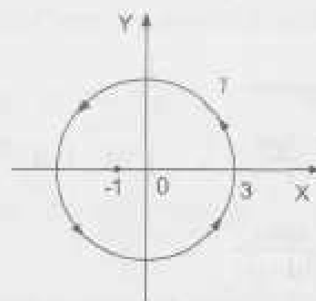
$$\oint_\gamma (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})dz = 2\pi i + \pi i + \frac{\pi}{3}i + 2\pi i + 3\pi i + \frac{13\pi}{3}i + 2\pi i + 5\pi i + \frac{37\pi}{3}i$$

$$= 15\pi i + \frac{51\pi}{3}i = 15\pi i + 17\pi i = 32\pi i$$

$$\therefore \oint_\gamma (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})dz = 32\pi i$$

(25) Calcular la integral: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z+1)^5}$, $t > 0$ donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 3\}$

Desarrollo



La integral se puede calcular por el Teorema del residuo y por el criterio de la integral de Cauchy primero calculamos la integral por el teorema del residuo

la función $f(z) = \frac{e^{tz}}{(z+1)^5}$ tiene un polo en $z = -1$ de orden 5.

$$Re(f,-1) = \frac{1}{(5-1)!}\lim_{z \to -1}\frac{d^4}{dz^4}[(z+1)^5 \frac{e^{tz}}{(z+1)^5}] = \frac{1}{4!}\lim_{z \to -1}\frac{d^4}{dz^4}(e^{tz})$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{z \to -1} t^4 e^{tz} = \frac{t^4 e^{-t}}{24} = \frac{t^4}{24e^t}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z+1)^5} = \frac{1}{2\pi i}[2\pi i Re(f,-1)] = Re(f,-1) = \frac{t^4}{24e^t}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z+1)^5} = \frac{t^4}{24e^t}$$

ahora calculamos por el criterio de la integral de Cauchy.

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ de donde $n = 4$, $z_0 = -1$

$$f(z) = e^{tz} \Rightarrow f^{iv}(z) = t^4 e^{tz} \Rightarrow f^{iv}(-1) = \frac{t^4}{e^t}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-1)^{4+1}} = \frac{f^{iv}(-1)}{n!} = \frac{t^4}{4!e^t} = \frac{t^4}{24e^t}$$

4.7. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Hallar el residuo en $z = 0$, de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \frac{1}{z+z^2}$ b) $f(z) = \frac{z - sen z}{z}$ c) $f(z) = \frac{ctg\, z}{z^4}$

d) $f(z) = z\cos\frac{1}{z}$ e) $f(z) = \frac{senh\, z}{z^4(1-z^2)}$

(2) Calcular el residuo en los polos correspondientes a la función:

a) $f(z) = \frac{1-\cosh z}{z^3}$ b) $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ c) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

(3) Encuentre el residuo en todas las singularidades para las siguientes funciones dadas.

a) $f(z) = \frac{z^3}{z^2+1}$ b) $f(z) = \frac{e^z}{z^3-z}$ c) $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2}$

d) $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$ e) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ f) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z}}$

(6) Halle los puntos singulares de las funciones y analice la naturaleza de los mismos.

a) $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$ b) $f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}$ c) $f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2}$

d) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2}$ e) $f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$ f) $f(z) = \frac{z^2+1}{e^z}$

(7) Halle los puntos singulares de las funciones y analice la naturaleza de los mismos.

a) $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ b) $f(z) = ze^{-z}$ c) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

d) $f(z) = \frac{1-e^z}{2+e^{-z}}$ e) $f(z) = \frac{1}{z^3(2-\cos z)}$ f) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$

g) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ h) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$ i) $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}$

(8) Calcular los residuos de las funciones dadas en todos sus puntos singulares aisladas.

Determine todas las singularidades de la función y clasifique cada singularidad.

a) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$ b) $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)}$ c) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}(z-1)$

d) $f(z)=\frac{sen\, z}{z-\pi}$ e) $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$ f) $f(z)=\frac{z-i}{z^2+1}$

Determine todas las singularidades de la función y clasifique que cada singularidad

a) $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ b) $f(z)=\frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+1)}$ c) $f(z)=\frac{zi-1}{(z^2+2z-3)^2}$

d) $f(z)=\frac{sen\, z}{senh\, z}$ e) $f(z)=\frac{sen\, z}{z(z-\pi)(z-i)^2}$ f) $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$

a) $f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}$ b) $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ c) $f(z)=\frac{1}{z(1-z^2)}$

d) $f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ e) $f(z)=\frac{sen\, 2z}{(z+1)^3}$ f) $f(z)=tg\, z$

(9) Calcular los residuos de las funciones indicadas en todos sus puntos singulares aisladas

a) $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ b) $f(z)=z^3\cos(\frac{1}{z-2})$ c) $f(z)=sen(\frac{z}{z+1})$

d) $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{sen\sqrt{z}}$ e) $f(z)=ctg^2 z$ f) $f(z)=\cos(\frac{z^2+4z-1}{z+3})$

(10) Encuentre el residuo de la función en cada singularidad

a) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$ b) $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)}$ c) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}(z-i)$

d) $f(z)=\frac{sen\, z}{z-\pi}$ e) $f(z)=\frac{\cos 2z}{(z-1)^2(z^2+1)}$ f) $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$

(11) Encuentre el residuo de la función en cada singularidad

a) $f(z)=\frac{z-i}{z^2+1}$ b) $f(z)=\frac{sen\, z}{senh\, z}$ c) $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$

d) $f(z)=\frac{sen\, z}{z(z-\pi)(z-i)^2}$ e) $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ f) $f(z)=\frac{senh\, z}{z^4}$

g) $f(z)=\frac{2i-1}{(z^2+2z-3)^2}$ h) $f(z)=\frac{sen z}{(z+\pi)^2}$ i) $f(z)=\frac{1}{sen^3(2z)}$

(12) Evalué cada integral donde γ es cualquier curva cerrada simple suave a pedazos que encierra a todas las singularidades del integrando.

a) $\oint_\gamma \frac{2z\, dz}{(z-i)^2}$ b) $\oint_\gamma \frac{1+z^2}{(z-1)^2(z+2i)}dz$ c) $\oint_\gamma \frac{\cos z\, dz}{4+z^2}$

d) $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z}$ e) $\oint_\gamma \frac{z-i}{2z+1}dz$ f) $\oint_\gamma \frac{z+i}{z^2+6}dz$

(13) Evalué las integrales donde γ es cualquier curva cerrada simple suave a pedazos que encierra a todas las singularidades del integrando.

a) $\oint_\gamma \frac{\cos z}{ze^z}dz$ b) $\oint_\gamma e^{\frac{2}{z^3}}dz$ c) $\oint_\gamma \frac{iz\, dz}{(z^2+9)(z-i)^2}$

d) $\oint_\gamma \frac{z^2 dz}{z-1+2i}$ e) $\oint_\gamma \frac{8z-4i+1}{z+4i}dz$ f) $\oint_\gamma \frac{(1-z)^2 dz}{z^3-8}$

(14) Evalué la integral donde $\gamma: \|z\|=2$

a) $\oint_\gamma \frac{z^3 dz}{z^2+1}$ b) $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^3+z}$

(15) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{sen\, z}{z^3+z}dz$ donde $\gamma: \|z-\frac{1}{2}\|=1$

(16) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{\cosh(2z)dz}{(z-i)(1+z^2)}$, donde $\gamma: \|z-i\|=1$

(17) Calcular $\oint_\gamma \frac{sen\, z\, dz}{(z^3+z)^2}$, donde $\gamma: \|z\|=2$

(18) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z^n(z^2+1)^2}$, donde $\gamma: \|z-1\|=2,\ n\in z^+$

(19) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$, donde $\|z-i\|=\frac{3}{2},\ n\in z^+$

(20) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^z(z^2-4)^2}{(z+i)^2}dz$, donde $\gamma: \|z-1+2i\|=4$

(21) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$, donde $\gamma: \|z-1\|=\sqrt{\frac{5}{2}},\ n\in z^+$

(22) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$, donde $\gamma: \|z-i\|=\frac{1}{2},\ n\in z^+$

(23) Calcular $\oint_\gamma \frac{2z-3}{(z+i)^3}dz$, donde $\gamma: \|z-2i\|=4$

(24) Hallar el valor de la integral $\oint_\gamma \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$, en sentido positivo a lo largo del circulo $\gamma: \|z-2\|=2$

(25) Hallar el valor de la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2(z+4)}$ en sentido positivo a lo largo del circulo $\gamma: \|z+2\|=3$

(26) Evalué la integral $\oint_\gamma \frac{sen\, z.\cos 2z\, dz}{z^2+9}$, donde γ encierra a i pero no a -i.

(27) Evalué la integral $\oint_\gamma \frac{e^{2z}dz}{z(z-i)}$, donde γ encierra a 0 e i.

(28) Evalué la integral $\oint_\gamma \frac{e^{2z}}{z^4}dz$ donde $\gamma: \|z-\pi i\|=2\pi$

(36) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{(z-3)(z^3-1)}$, donde $\gamma: \|z\|=2$

(37) Evalué la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{sen\, z}$, alrededor de $\gamma: \|z-6\|=4$

(38) Calcular $\oint_\gamma \frac{ze^{-z}dz}{z^4+i}$, donde $\gamma: \|z-5\|=1$

(39) Calcular $\oint_\gamma \frac{z-\cos(4iz)}{(z^2+1)(z^2-1)}dz$, donde $\gamma: \|z+i\|=1$

(40) Calcular $\oint \frac{3(z-1)^2-1}{\ldots}dz$ ...

(29) Calcular $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z^2(z^2+2z+2)}$ alrededor del circulo γ con ecuación $\|z\|=3$

(30) Calcular $\oint_\gamma \frac{(2z^2+5)}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}dz$, donde γ es el cuadrado con vértice en 1 + i, 2 + i, 2 + 2i, 1 + 2i.

(31) Calcular $\oint_\gamma \frac{2+3sen\,\pi z}{z(z-1)^2}dz$, donde γ es el cuadrado con vértices en 3 + 3i, 3 − 3i, -3 + 3i, -3 − 3i.

(32) Probar que: $\oint_\gamma \frac{\cosh z}{z^3}dz=\pi i$, donde γ es el cuadrado con vértices en $\pm 2 \pm 2i$

(33) Calcular $\oint_\gamma \frac{(z+1)\cosh z}{(z-1)(z+2i)}dz$, donde $\gamma:\|z-3i\|=\frac{3}{2}$

(34) Calcular $\oint_\gamma \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, donde $\gamma:\|z-2\|=\frac{1}{2}$

(35) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{z^4+1}$ donde $\gamma: x^2+y^2=2x$

Calcular $\oint_\gamma \frac{[illegible]}{z^3-3z^2+4z-2}dz$, donde γ es el rectángulo de lados: x = 0; x = 2; y = 2; y = -2 recorrido en sentido positivo.

(41) Integrar $\oint_\gamma \frac{\cos z\,dz}{z^3+z}$, sobre:

a) $\gamma:\|z\|=2$ b) $\gamma:\|z\|=\frac{1}{2}$ c) $\gamma:\|z-\frac{i}{2}\|=1$

(42) Si γ es el rectángulo: x = ± 4; y = ± 4. Descrita en dirección positiva, calcular:

a) $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^5}dz$ b) $\oint_\gamma \frac{senh\,2z\,dz}{(z-\frac{\pi}{4})^4}$

(43) Evaluar la integral donde $\gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) $\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}dz$ b) $\oint_\gamma e^{\frac{1}{z^2}}dz$

(44) Sea γ el circulo $\|z\|=2$ positivamente orientado, calcular la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{senh\,2z}$

5) Probar que si γ es el circulo $\|z\|=8$, positivamente orientado, entonces $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dt}{senh\,t}=1-2\cos\pi t+2\cos 2\pi t$

6) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^3+z}dz$, donde $\gamma:\|z-1\|=\frac{1}{2}$

7) Calcular integral $\oint_\gamma \frac{sen\,\pi(z-1)dz}{z^2-2z+2}$, donde $\gamma:\|z-1-i\|=1$

8) Calcular $\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$ donde $\gamma:\|z\|=4$

9) Calcular $\oint_\gamma \frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2-4)}dz$, donde $\gamma: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

0) Calcular $\oint_\gamma \frac{10z^8-2z^4+2z-1}{2z^6-z^5}dz$, donde $\gamma:\|z\|=1$

1) Calcular $\oint_\gamma \frac{2z^4+14z^2+16}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2+9)}dz$, donde $\gamma:\|z\|=4$

2) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-2)(z+5i)}$, donde $\gamma:\|z\|=3$

3) Calcular $\oint_\gamma \frac{z^3-z^4}{(z-1)\cos z}dz$, donde $\gamma:\|z\|=4$

4) Calcular $\oint_\gamma \frac{\cosh(\pi z)dz}{z(z^2+9)}$, donde $\gamma:\|z-2i\|=9$

5) Calcular $\oint_\gamma \frac{(z-i)^2dz}{sen^2 z}$, donde γ es el cuadrado con vértices 4 + 4i, 4 − 4i, -4 + 4i, -4 − 4i.

(56) Calcular $\oint_\gamma \frac{sen\,z-senh\,z}{z^3}dz$, donde $\gamma:\|z+1\|=\frac{3}{2}$

(57) Calcular $\oint_\gamma \frac{(z-2i)^2dz}{z^2-2z+2}$, donde $\gamma:\|z\|=8$

(58) Calcular $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{zt}dz}{z(z^2+1)}$, t > 0 alrededor del cuadrado con vértices en 1 + i, -1 + i, -1 − i, 1 − i.

(59) Evaluar $\oint_\gamma \frac{(2z^2+5)dz}{(z+1)(z^2+1)^2}$ donde $\gamma:\|z+i\|=1$

(60) Evaluar $\oint_\gamma \frac{dz}{sen\,z}$, alrededor de $\gamma:\|z-6\|=4$

(61) Evaluar $\oint_\gamma \frac{senh\frac{1}{z}}{z-1}dz$, alrededor de $\gamma:\|z\|=2$

(62) Evaluar $\oint_\gamma \frac{sen\,z}{senh^2 z}dz$, alrededor de $\gamma:\|z\|=3$

(63) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$, donde $\gamma:\|z\|=3$

(64) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$, donde $\gamma: x^2+y^2-2x=0$

(65) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-\pi)^3}$, donde $\gamma:\|z\|=4$

(66) Calcular $\oint_\gamma z^3 sen\frac{1}{z}dz$, donde $\gamma:\|z\|=1$

(67) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$, donde $\gamma:\|z-i\|=3$

(68) Calcular $\int_\gamma \frac{z}{e^z+3}dz$, donde $\gamma:\|z+1\|=4$

(69) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$, donde $\gamma:\|z-i\|=1$

CAPÍTULO IX

EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES DEFINIDAS E

(70) Calcular $\oint_\gamma (z+1)e^{z}dz$, donde $\gamma: \|z\| = \frac{}{3}$

(71) Calcular $\oint_\gamma (z^2+z^3)e^{\frac{1}{z-4}}dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 5\}$

(72) Calcular $\oint_\gamma \frac{e^{\pi z^2 - 1}}{z^4 - z^2}dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 1\}$

(73) Evaluar la integral $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}$, donde γ: $\|z\| = 2$

(74) Evaluar $\oint_\gamma z^8 sen\frac{1}{z}dz$, donde γ: $\|z\| = 1$

(75) Calcular $\oint_\gamma (1+z+z^2+z^3+z^4)(e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 3\}$

(76) Calcular la integral $\oint_\gamma \frac{dz}{z^{10}+1}$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 2\}$

(77) Evaluar $\oint_\gamma \frac{e^z dz}{(z-3)^{450}}$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z-1\| = 6\}$

(78) Evaluar $\oint_\gamma \frac{z^{10}+z^4-4z+1}{(z-6)^n}dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = 3\}$

(79) Calcular $\oint_\gamma \frac{27z^3-18z^2-5z+2}{9z^4-z^2}dz$, donde γ: $\|z\| = 1$

(80) Calcular $\oint_\gamma \frac{9z^2-iz+4}{z^3(z^2+1)}dz$, donde $\gamma = \{z \in C / \|z\| = \frac{1}{2}\}$

IMPROPIAS (APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO)

9. INTEGRALES ESPECIALES.-

En este capítulo presentaremos algunas técnicas útiles para aplicar el teorema del Residuo para la evaluación de las integrales reales definidas e impropias, los tipos específicos de integrales reales considerados son las siguientes.

(1) INTEGRALES DE LA FORMA: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, sen\theta)d\theta$

Para evaluar una integral de la forma $\int_0^{2\pi} R[\cos\theta, sen\theta]d\theta$ donde R es una función racional de seno y coseno, es suficiente recordar que: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $sen\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Además se tiene que $z = e^{i\theta}$ donde γ: $\|z\| = 1$, transforma a la integral dada en una integral de línea donde: $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\quad sen\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

parametrizando la curva γ mediante $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ por lo tanto se tiene:

$$\int_0^{2\pi} R[\cos\theta, sen\theta]d\theta = \oint_\gamma R[\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})]\frac{dz}{iz}$$

En esta integral de línea se aplica el teorema del Residuo.

Ejemplo.- Evaluar la integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\frac{\cos\theta}{4}}$

Desarrollo

Sea γ: $\|z\| = 1$, orientado en sentido anti – horario.

Transformamos a la integral definida en una integral de línea mediante la sustitución

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\frac{\cos\theta}{4}} = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{1+\frac{1}{8}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz} = \oint_\gamma \frac{4(z^2+1)dz}{iz(z^2+8z+1)}$$

Los polos simples que están dentro de γ son $z = 0$ y $z = -4+\sqrt{15}$ y el polo que esta fuera del interior de γ es $z = -4-\sqrt{15}$

Calculando los residuos de las singularidades en el interior de γ

$$Re(f,0) = \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z(z^2+1)4}{iz(z^2+8z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{4(z^2+1)}{i(z^2+8z+1)} = -4i$$

$$Re(f,-4+\sqrt{15}) = \lim_{z\to -4+\sqrt{15}} \frac{(z+4-\sqrt{15})4(z^2+1)}{iz(z+4-\sqrt{15})(z+4+\sqrt{15})}$$

$$= \lim_{z\to -4+\sqrt{15}} \frac{4(z^2+1)}{iz(z+4+\sqrt{15})} = \frac{16i}{\sqrt{15}}$$

mediante el teorema del residuo se tiene:

$$\oint_\gamma \frac{4(z^2+1)dz}{iz(z^2+8+1)} = 2\pi i(-4i+\frac{16i}{\sqrt{15}}) = 2\pi(\frac{4\sqrt{15}-16}{\sqrt{15}})$$

Ejemplo.- Demostrar que: $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, $a > b > 0$

Desarrollo

Como $\cos\theta$, toma los mismos valores en $[\pi, 2\pi]$ que en el intervalo $[0,\pi]$, entonces a la integral dada expresaremos

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta},\quad a > b > 0$$

ahora transformamos a la integral definida en una integral de línea donde γ: $\|z\| = 1$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{b}{2}(z+\frac{1}{z})} = \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{dz}{bz^2+2az+b}$$

calculando los polos en el circulo interior γ: $\|z\| = 1$

$$bz^2+2az+b = 0 \Rightarrow z = -\frac{a}{b} \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$ de donde

$z = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ es un polo que esta dentro de γ: $\|z\| = 1$

$z = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ es un polo que esta fuera de γ: $\|z\| = 1$

ahora calculamos el residuo de f en $z = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

$$Re(f,\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}) = \lim_{z\to\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} (z+\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}).f(z)$$